Kurvendiskussion
Gebrochenrationale Funktion
Aufgaben und Lösungen

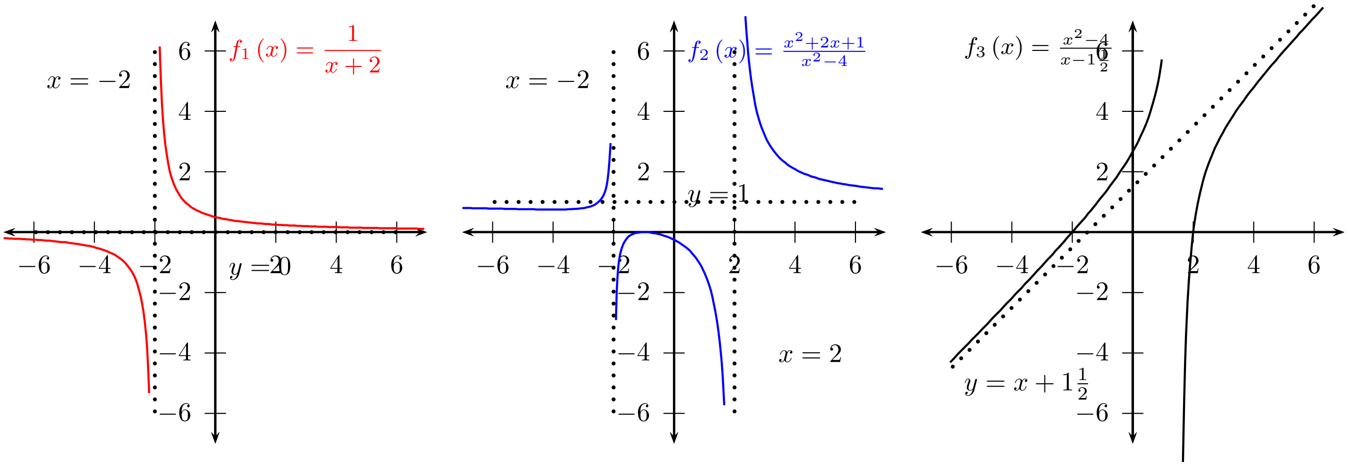
http://www.fersch.de

©Klemens Fersch

7. September 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Gebrochenrationale Funktion



Formen der Polynomfunktion

$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$

$= \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} ... + b_2x^2 + b_1x^1 + b_0}$

Zählerpolynom

$Z(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$

Zählergrad: n

Nennerpolynom:

$N(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} ... + b_2x^2 + b_1x^1 + b_0$

Nennergrad: m

Faktorisierte Form

$f(x) = a\frac{(x-z_1)(x-z_2)(x-z_3)...}{(x-n_1)(x-n_2)(x-n_3)...}$

$z_1, z_2, z_3...$ Nullstellen des Zählers

$n_1, n_2, n_3...$ Nullstellen des Nenners

$f_1(x) = \frac{1}{x+2}$

$f_2(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4} = \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)}$

$f_3(x) = \frac{x^2-4}{x-1\frac{1}{2}}$

$f_3(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x-1\frac{1}{2}}$

$f_3(x) = x + 1\frac{1}{2} + \frac{-1\frac{3}{4}}{x-1\frac{1}{2}}$

Definitions- und Wertebereich

Definitionsbereich: Nullstellen des Nennerpolynoms ausschließen.

Wertebereich: Bestimmung nur nach Kurvendiskussion möglich.

$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f_2(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

Nenner Null setzen

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 - 4 = 0 \qquad / + 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

Nullstellen

Nullstellen - Schnittpunkte mit der x-Achse
Zählerpolynom gleich Null setzen.
siehe Algebra - Gleichungen

$f_2(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$
Zähler Null setzen
$x^2+2x+1=0$
$x^2+2x+1=0$
$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$
$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$
$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
Faktorisierter Term:
$f_2(x) = \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)}$

Verhalten im Unendlichen - Grenzwert - Asymptoten

• Zählergrad>Nennergrad
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty$
Das Vorzeichen der Glieder mit der höchsten Potenzen und der Grad der höchsten Exponenten, bestimmen das Vorzeichen des Grenzwerts.
Grenzwert gegen plus Unendlich
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(\infty)^n}{(\infty)^m} = \pm\infty$
Grenzwert gegen minus Unendlich
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a_n}{b_m} \cdot \frac{(-\infty)^n}{(-\infty)^m} = \pm\infty$

• Zählergrad=Nennergrad+1
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$
Polynomdivision - schiefe Asymptote
• Zählergrad=Nennergrad
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$
horizontale Asymptote $y = \frac{a_n}{b_m}$

• Zählergrad<Nennergrad
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$
horizontale Asymptote $y = 0$

Zählergrad < Nennergrad
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x+2} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
Zählergrad = Nennergrad
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1x^2+2x+1}{1x^2-4} = \frac{1}{1} = 1$
Horizontale Asymptote: $y = 1$
Zählergrad = Nennergrad+1
$f_3(x) = \frac{x^2-4}{x-1\frac{1}{2}}$
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{(\infty)^2}{(\infty)^1} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{1} \cdot \frac{(-\infty)^1}{(-\infty)^1} = -\infty$

Polynomdivision :

$$
\begin{array}{l}
(x^2 \qquad\qquad -4 \quad) : (x - 1\frac{1}{2}) = x + 1\frac{1}{2} \\
-(x^2 \quad -1\frac{1}{2}x) \\
\hline
\qquad 1\frac{1}{2}x \quad -4 \\
\qquad -(1\frac{1}{2}x \quad -2\frac{1}{4}) \\
\hline
\qquad\qquad -1\frac{3}{4}
\end{array}
$$

$f_3(x) = x + 1\frac{1}{2} + \frac{-1\frac{3}{4}}{x-1\frac{1}{2}}$
Schiefe Asymptote: $y = x + 1\frac{1}{2}$

Verhalten an den Definitionslücken - Grenzwert - Asymptoten

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x_0, x_1..\}$

$x_0, x_1..$ sind Definitionslücken von f(x)

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty \Rightarrow$
vertikale Asymptote $x = x_0$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{(x+2)} = \infty$$
$$\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{(x+2)} = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$$
$$\lim_{x \to -2^-} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$$
$$\lim_{x \to 2^-} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 2$

Symmetrie

Punktsymmetrie zum Ursprung:

$f(-x) = -f(x)$

Achsensymmetrie zur y-Achse:

$f(-x) = f(x)$

Ableitung

Ableitungen bildet man durch die Quotientenregel

$$f'(x) = \frac{Z'(x) \cdot N(x) - Z(x) \cdot N'(x)}{(N(x))^2}$$

Die erste Ableitung $f'(x)$ gibt die Steigung der Funktion an der Stelle x an.

Die zweite Ableitung $f''(x)$ gibt die Krümmung der Funktion an der Stelle x an.

$f_1'(x) = \frac{0 \cdot (x+2) - 1 \cdot 1}{(x+2)^2}$
$= \frac{0-1}{(x+2)^2}$
$= \frac{-1}{(x+2)^2}$
$= \frac{-1}{(x+2)^2}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot (x^2+4x+4) - (-1) \cdot (2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \frac{0-(-2x-4)}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \dfrac{2(x+2)}{(x+2)^4}$
$= \dfrac{2}{(x+2)^3}$

$f_2(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$
$f'(x) = \frac{(2x+2) \cdot (x^2-4) - (x^2+2x+1) \cdot 2x}{(x^2-4)^2}$
$= \frac{(2x^3+2x^2-8x-8) - (2x^3+4x^2+2x)}{(x^2-4)^2}$
$= \frac{-2x^2-10x-8}{(x^2-4)^2}$

Extremwerte

Notwendige Bedingung: 1. Ableitung gleich Null setzen und Nullstellen bestimmen

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der Nullstellen x_0 in die 2. Ableitung

- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ Lokales Minimum bei x_0
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ Lokales Maximum bei x_0
- $f''(x_0) = 0 \wedge f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ Terrassenpunkt

$f_2'(x) = \frac{-2x^2 - 10x - 8}{x^4 - 8x^2 + 16} = 0$

$-2x^2 - 10x - 8 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-2)}$

$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{36}}{-4}$

$x_{1/2} = \frac{10 \pm 6}{-4}$

$x_1 = \frac{10 + 6}{-4} \qquad x_2 = \frac{10 - 6}{-4}$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = -1$

$f''(-4) = 6 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt: $(-4/\frac{3}{4})$

$f''(-1) = -6$

$f''(-1) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt: $(-1/0)$

Monotonie

Erste Ableitung gleich Null setzen und Nullstellen bestimmen.

Bei gebrochenrationalen Funktionen kann sich das Vorzeichen an den Nullstellen des Zählers und Nenners ändern.

Nullstellen vom Zähler und Nenner $x_1, x_2..$ in die Vorzeichentabelle eintragen.

Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als die Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f'(x)$ in die Tabelle eintragen.

Vorzeichentabelle mit $f'(x)$

	$x <$	x_1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
Graph	steigend	0	fallend

Vorzeichenwechsel

von + nach - $\Rightarrow$ Lokales Maximum bei x_1

von - nach + $\Rightarrow$ Lokales Minimum bei x_1

von + nach + $\Rightarrow$ Terrassenpunkt bei x_1

von - nach - $\Rightarrow$ Terrassenpunkt bei x_1

Zaehler = 0

keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_2 = -2$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; \infty[$

$f'(x) < 0$ streng monoton fallend

Wendepunkt

Notwendige Bedingung: 2. Ableitung gleich Null setzen und Nullstellen bestimmen

Hinreichende Bedingung: Einsetzen der Nullstellen x_1 in die 3. Ableitung

- $f'''(x_1) \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei x_1.
- $f'''(x_1) = 0 \Rightarrow$ Kein Wendepunkt.

Krümmung

Zweite Ableitung gleich Null setzen und Nullstellen bestimmen.
Bei gebrochenrationalen Funktionen kann sich das Vorzeichen an den Nullstellen des Zählers und Nenners ändern.
Nullstellen vom Zähler und Nenner $x_1, x_2..$ in die Vorzeichentabelle eintragen.
Einen beliebigen Wert kleiner bzw. größer als Nullstelle wählen und das Vorzeichen von $f''(x)$ in die Tabelle eintragen.
Vorzeichentabelle mit $f''(x)$

	$x <$	x_1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Graph	links gekrümmt	0	rechts gekrümmt

Vorzeichenwechsel
von + nach - $\Rightarrow$ Wendepunkt bei x_1
von - nach + $\Rightarrow$ Wendepunkt bei x_1
von + nach + $\Rightarrow$ Flachpunkt bei x_1
von - nach - $\Rightarrow$ Flachpunkt bei x_1

•Kruemmung
$f''(x) = \frac{2}{x^3+6x^2+12x+8}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_3 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-2;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty;-2[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

2 Gebrochen rationale Funktion Zählergrad < Nennergrad

2.1 Aufgaben

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$
(2) $f(x) = \frac{-1}{x}$
(3) $f(x) = \frac{1}{x+2}$
(4) $f(x) = \frac{-1}{x-2}$
(5) $f(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}}$
(6) $f(x) = \frac{1}{x^2}$
(7) $f(x) = \frac{-1}{x^2}$
(8) $f(x) = \frac{3}{x^2+4}$
(9) $f(x) = \frac{-4}{x^2-4}$
(10) $f(x) = \frac{\frac{1}{5}}{x^2+2x+1}$
(11) $f(x) = \frac{-1\frac{1}{2}}{x^2-6x+9}$
(12) $f(x) = \frac{9x}{x^2+3}$
(13) $f(x) = \frac{x}{x^2}$
(14) $f(x) = \frac{-3x+3}{2x^2+4x+2}$
(15) $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x+1}{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}}$
(16) $f(x) = \frac{-x+3}{x^2-9}$
(17) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$
(18) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2}$
(19) $f(x) = \frac{-4x+\frac{1}{2}}{x^2+4}$
(20) $f(x) = \frac{2x-\frac{1}{4}}{x^2-4}$
(21) $f(x) = \frac{\frac{1}{5}x}{x^2+2x+1}$
(22) $f(x) = \frac{-1\frac{1}{2}x+2}{x^2-6x+9}$
(23) $f(x) = \frac{1}{x^3+3x^2+3x+1}$
(24) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$

(25) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

2.2 Lösungen

Aufgabe (1)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{1}{x}$
Nenner faktorisieren:
$x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{1}{x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{(x)^2}$
$= \frac{0 - 1}{(x)^2}$
$= \frac{-1}{(x)^2}$
$= \frac{-1}{(x)^2}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot x^2 - (-1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{0 - (-2x)}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{x^4}$
$= \frac{2}{x^3}$
$= \frac{2}{x^3}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$1 = 0$
keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x(1)} = 0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-1}{x^2} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_2 = 0$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{2}{x^3}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

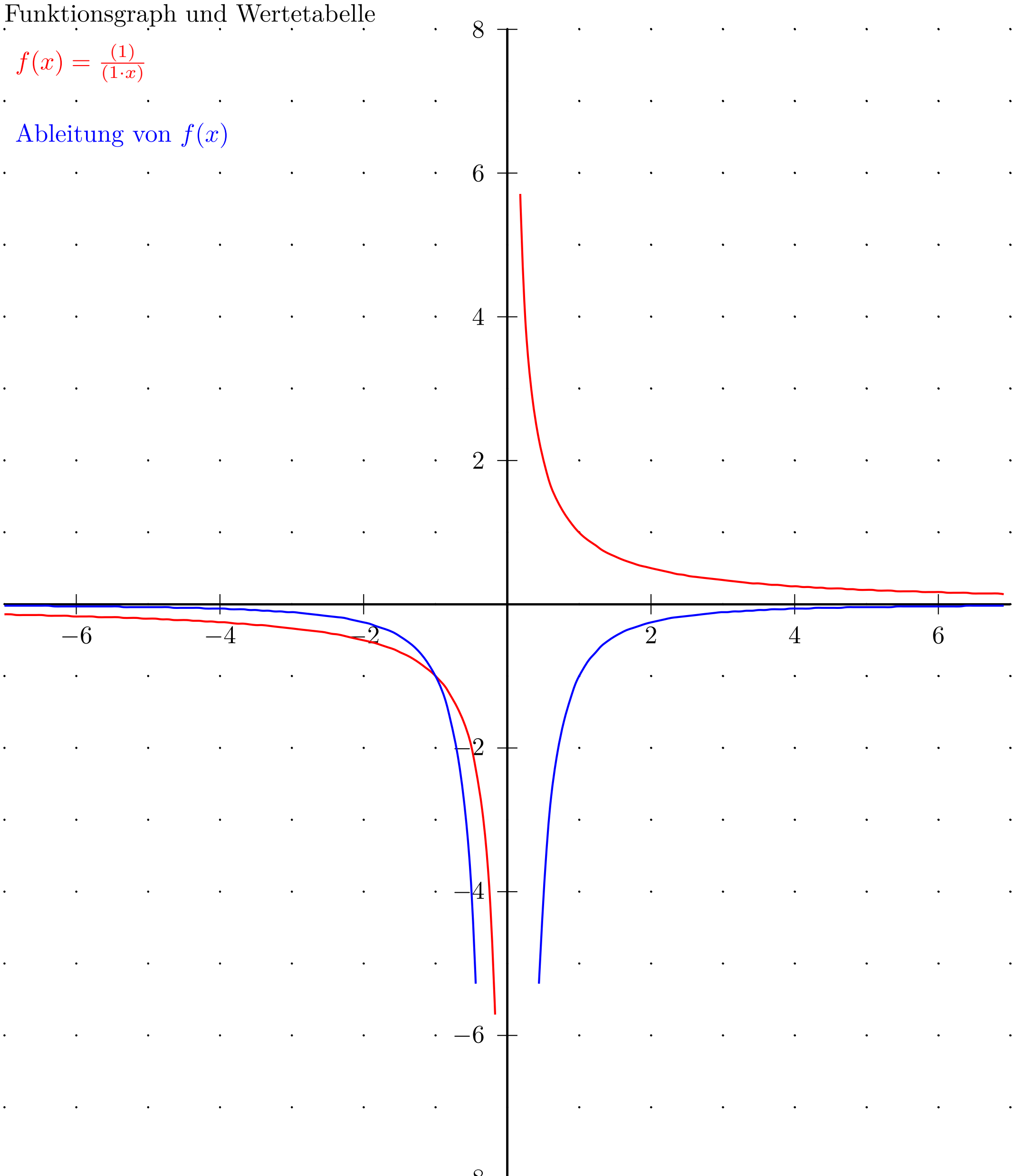
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_3 = 0$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$-0,00583$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{13}$	$-0,0237$	$-0,00728$
-6	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$-0,00926$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{11}$	$-0,0331$	$-0,012$
-5	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$-0,016$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,0219$
-4	$-\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$-\frac{1}{32}$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$-0,0466$
-3	$-\frac{1}{3}$	$-0,111$	$-0,0741$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$-0,16$	$-0,128$
-2	$-\frac{1}{2}$	$-0,25$	$-0,25$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,445$	$-0,593$
-1	-1	-1	-2
$-\frac{1}{2}$	-2	-4	-16
0	$+unendlich$	$3265\frac{15}{49}$	$-unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$+unendlich$	$3265\frac{15}{49}$	$-unendlich$
$\frac{1}{2}$	2	-4	16
1	1	-1	2
$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-0,445$	$0,593$
2	$\frac{1}{2}$	$-0,25$	$0,25$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-0,16$	$0,128$
3	$\frac{1}{3}$	$-0,111$	$0,0741$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$0,0466$
4	$\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$\frac{1}{32}$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$0,0219$
5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$0,016$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$-0,0331$	$0,012$
6	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$0,00926$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$-0,0237$	$0,00728$
7	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$0,00583$

Aufgabe (2)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-1}{x}$

Nenner faktorisieren:

$x = 0$

$x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-1}{x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \frac{-1}{x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{0 \cdot x - (-1) \cdot 1}{(x)^2}$

$= \frac{0 - (-1)}{(x)^2}$

$= \frac{1}{(x)^2}$

$= \frac{1}{(x)^2}$

$f''(x) = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{0 - 2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{-2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{-2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{-2x}{x^4}$

$= \frac{-2}{x^3}$

$= \frac{-2}{x^3}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-1 = 0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{(-1)}{x(1)} = 0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-1}{x} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{1}{x^2} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{1}{x^2}$
Zaehler $= 0$
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_2 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{-2}{x^3}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

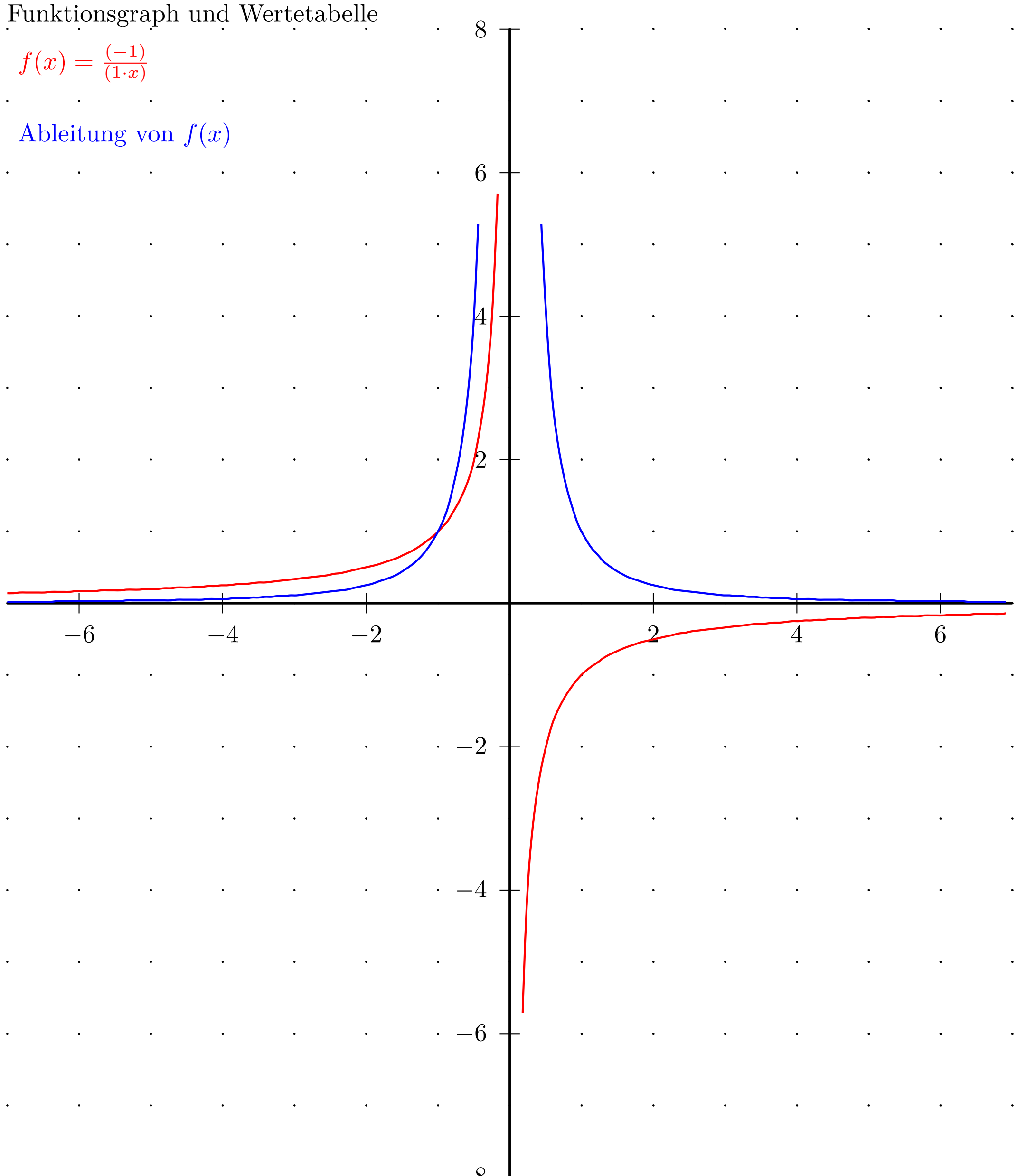
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_3 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]0; \infty[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{49}$	$0,00583$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$0,0237$	$0,00728$
-6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$0,00926$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$0,0331$	$0,012$
-5	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$0,016$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$0,0219$
-4	$\frac{1}{4}$	$0,0625$	$\frac{1}{32}$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$0,0816$	$0,0466$
-3	$\frac{1}{3}$	$0,111$	$0,0741$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$0,16$	$0,128$
-2	$\frac{1}{2}$	$0,25$	$0,25$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$0,445$	$0,593$
-1	1	1	2
$-\frac{1}{2}$	2	4	16
0	$-unendlich$	$-3265\frac{15}{49}$	$+unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-unendlich$	$-3265\frac{15}{49}$	$+unendlich$
$\frac{1}{2}$	-2	4	-16
1	-1	1	-2
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$0,445$	$-0,593$
2	$-\frac{1}{2}$	$0,25$	$-0,25$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$0,16$	$-0,128$
3	$-\frac{1}{3}$	$0,111$	$-0,0741$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$0,0816$	$-0,0466$
4	$-\frac{1}{4}$	$0,0625$	$-\frac{1}{32}$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$-0,0219$
5	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$-0,016$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{11}$	$0,0331$	$-0,012$
6	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$-0,00926$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{13}$	$0,0237$	$-0,00728$
7	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{49}$	$-0,00583$

Aufgabe (3)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{1}{x+2}$

Nenner faktorisieren:

$x + 2 = 0$

$x + 2 = 0 \qquad / - 2$

$x = -2$

$x_1 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{1}{(x+2)}$

• Definitionsbereich: $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$f(x) = \frac{1}{x+2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{0 \cdot (x+2) - 1 \cdot 1}{(x+2)^2}$

$= \frac{0-1}{(x+2)^2}$

$= \frac{-1}{(x+2)^2}$

$= \frac{-1}{(x+2)^2}$

$f''(x) = \frac{0 \cdot (x^2+4x+4) - (-1) \cdot (2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{0-(-2x-4)}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{2x+4}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \frac{2(x+2)}{(x+2)^4}$

$= \frac{2}{(x+2)^3}$

$= \frac{2}{x^3+6x^2+12x+8}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$1 = 0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-2;\infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-2[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x(1+\frac{2}{x})} = 0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{1}{(x+2)} = \infty$

$\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{1}{(x+2)} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2+4x+4} = 0$

keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'\,(x) = \dfrac{-1}{x^2+4x+4}$

Zaehler $= 0$

keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_2 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]-2;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''\,(x) = \dfrac{2}{x^3+6x^2+12x+8}$

$Zaehler = 0$

keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

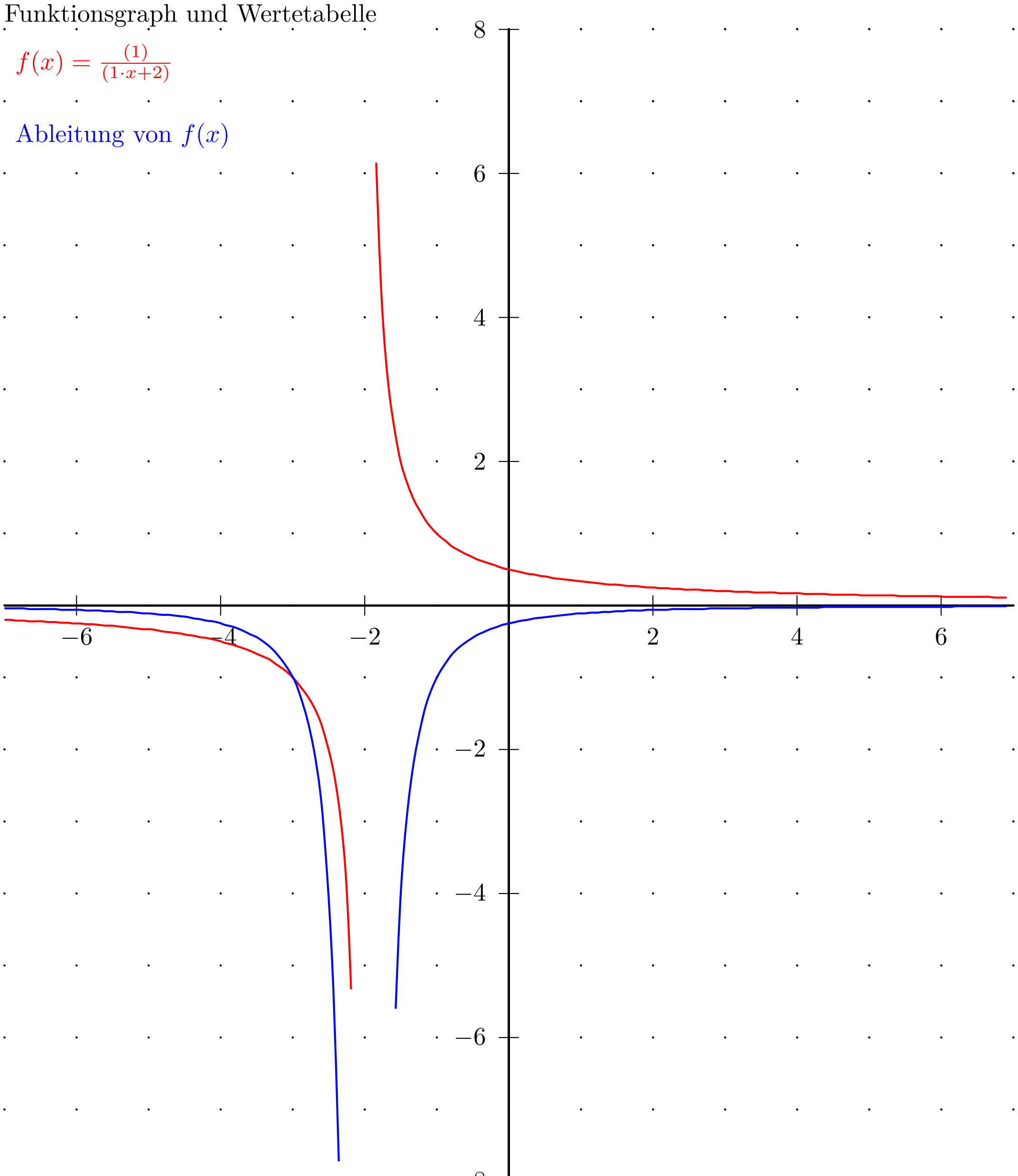
$x_3 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-2;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty;-2[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$-0,016$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,0219$
-6	$-\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$-\frac{1}{32}$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$-0,0466$
-5	$-\frac{1}{3}$	$-0,111$	$-0,0741$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$-0,16$	$-0,128$
-4	$-\frac{1}{2}$	$-0,25$	$-0,25$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,445$	$-0,593$
-3	-1	-1	-2
$-2\frac{1}{2}$	-2	-4	-16
-2	$+unendlich$	$3265\frac{15}{49}$	$-unendlich$
$-1\frac{1}{2}$	2	-4	16
-1	1	-1	2
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-0,445$	$0,593$
0	$\frac{1}{2}$	$-0,25$	$0,25$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{2}$	$-0,25$	$0,25$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-0,16$	$0,128$
1	$\frac{1}{3}$	$-0,111$	$0,0741$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$0,0466$
2	$\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$\frac{1}{32}$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$0,0219$
3	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$0,016$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$-0,0331$	$0,012$
4	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$0,00926$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$-0,0237$	$0,00728$
5	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$0,00583$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	$-0,0178$	$0,00474$
6	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{64}$	$0,00391$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{17}$	$-0,0138$	$0,00326$
7	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{81}$	$0,00274$

Aufgabe (4)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{-1}{x-2}$

Nenner faktorisieren:

$x - 2 = 0$

$x - 2 = 0 \qquad / + 2$

$x = 2$

$\underline{x_1 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{-1}{(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f(x) = \dfrac{-1}{x-2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{0 \cdot (x-2) - (-1) \cdot 1}{(x-2)^2}$

$= \dfrac{0 - (-1)}{(x-2)^2}$

$= \dfrac{1}{(x-2)^2}$

$= \dfrac{1}{(x-2)^2}$

$f''(x) = \dfrac{0 \cdot (x^2 - 4x + 4) - 1 \cdot (2x - 4)}{(x^2 - 4x + 4)^2}$

$= \dfrac{0 - (2x - 4)}{(x^2 - 4x + 4)^2}$

$= \dfrac{-2x + 4}{(x^2 - 4x + 4)^2}$

$= \dfrac{-2x + 4}{(x^2 - 4x + 4)^2}$

$= \dfrac{-2(x-2)}{(x-2)^4}$

$= \dfrac{-2}{(x-2)^3}$

$= \dfrac{-2}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-1 = 0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(-1)}{x(1-\frac{2}{x})} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{-1}{(x-2)} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-1}{(x-2)} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{1}{x^2-4x+4} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{1}{x^2-4x+4}$
Zaehler $= 0$
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_2 = 2; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; 2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{-2}{x^3-6x^2+12x-8}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_3 = 2; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 2[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]2; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{81}$	$0,00274$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{17}$	$0,0138$	$0,00326$
-6	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$	$0,00391$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	$0,0178$	$0,00474$
-5	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{49}$	$0,00583$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$0,0237$	$0,00728$
-4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$0,00926$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$0,0331$	$0,012$
-3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$0,016$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$0,0219$
-2	$\frac{1}{4}$	$0,0625$	$\frac{1}{32}$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$0,0816$	$0,0466$
-1	$\frac{1}{3}$	$0,111$	$0,0741$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$0,16$	$0,128$
0	$\frac{1}{2}$	$0,25$	$0,25$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{2}$	$0,25$	$0,25$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$0,445$	$0,593$
1	1	1	2
$1\frac{1}{2}$	2	4	16
2	$-unendlich$	$-3265\frac{15}{49}$	$+unendlich$
$2\frac{1}{2}$	-2	4	-16
3	-1	1	-2
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$0,445$	$-0,593$
4	$-\frac{1}{2}$	$0,25$	$-0,25$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$0,16$	$-0,128$
5	$-\frac{1}{3}$	$0,111$	$-0,0741$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$0,0816$	$-0,0466$
6	$-\frac{1}{4}$	$0,0625$	$-\frac{1}{32}$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$-0,0219$
7	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$-0,016$

Aufgabe (5)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}}$

Nenner faktorisieren:

$-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = 0$

$-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = 0 \qquad / + \frac{1}{2}$

$-\frac{2}{3}x = \frac{1}{2} \qquad / : \left(-\frac{2}{3}\right)$

$x = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{2}{3}}$

$x = -\frac{3}{4}$

$\underline{x_1 = -\frac{3}{4}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}(x + \frac{3}{4})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}\right\}$

$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{0 \cdot (-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}) - (-\frac{1}{3}) \cdot (-\frac{2}{3})}{(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2})^2}$

$= \frac{0 - \frac{2}{9}}{(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2})^2}$

$= \frac{-\frac{2}{9}}{(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2})^2}$

$= \frac{-\frac{2}{9}}{(-\frac{2}{3}x - \frac{1}{2})^2}$

$f''(x) = \frac{0 \cdot (\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}) - (-\frac{2}{9}) \cdot (\frac{8}{9}x + \frac{2}{3})}{(\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4})^2}$

$= \frac{0 - (-\frac{16}{81}x - \frac{4}{27})}{(\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4})^2}$

$= \frac{\frac{16}{81}x + \frac{4}{27}}{(\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4})^2}$

$= \frac{\frac{16}{81}x + \frac{4}{27}}{(\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-\frac{1}{3} = 0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-\frac{3}{4}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\frac{3}{4}; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$x \in]-\infty; -\frac{3}{4}[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(-\frac{1}{3})}{x(-\frac{2}{3} - \frac{\frac{1}{2}}{x})} = 0$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{4}^+} \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}(x+\frac{3}{4})} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\frac{3}{4}^-} \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{3}(x+\frac{3}{4})} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -\frac{3}{4}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}} = 0$

keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}}$

Zaehler $= 0$

keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_2 = -\frac{3}{4}; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$-\frac{3}{4}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -\frac{3}{4}[\quad \cup \quad]-\frac{3}{4}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{\frac{16}{81}x + \frac{4}{27}}{\frac{16}{81}x^4 + \frac{16}{27}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{16}}$

$Zaehler = 0$

$\frac{16}{81}x + \frac{4}{27} = 0 \qquad / -\frac{4}{27}$

$\frac{16}{81}x = -\frac{4}{27} \qquad / : \frac{16}{81}$

$x = \frac{-\frac{4}{27}}{\frac{16}{81}}$

$x = -\frac{3}{4}$

$x_3 = -\frac{3}{4}; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

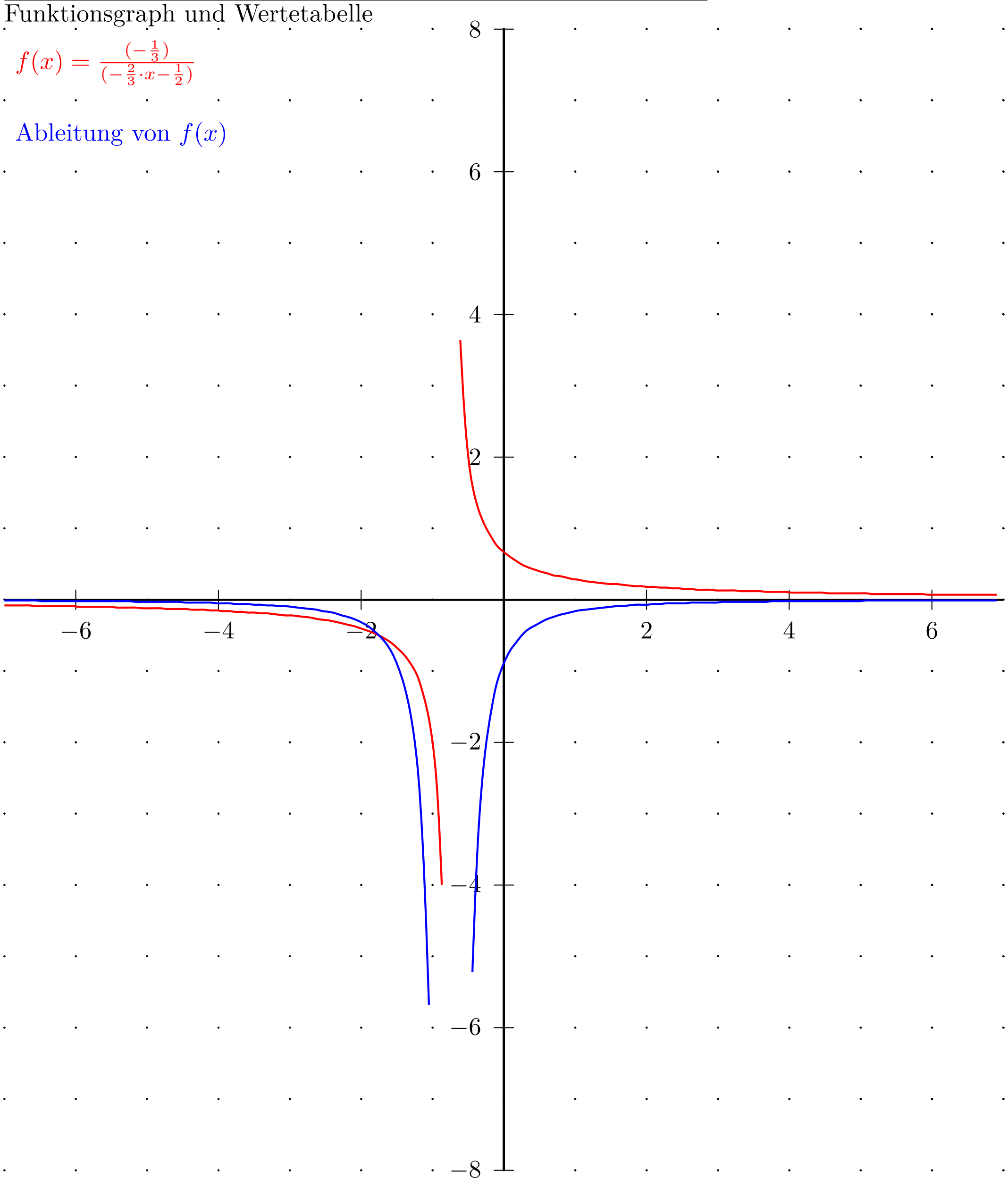
$x_4 = -\frac{3}{4}; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$-\frac{3}{4}$	$< x <$	$-\frac{3}{4}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\frac{3}{4};\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty;-\frac{3}{4}[\quad \cup \quad]-\frac{3}{4};-\frac{3}{4}[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{2}{25}$	$-0,0128$	$-0,0041$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{23}$	$-0,0151$	$-0,00526$
-6	$-\frac{2}{21}$	$-0,0181$	$-0,00691$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{19}$	$-0,0222$	$-0,00933$
-5	$-\frac{2}{17}$	$-0,0277$	$-0,013$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{15}$	$-0,0356$	$-0,019$
-4	$-\frac{2}{13}$	$-0,0473$	$-0,0291$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{11}$	$-0,0661$	$-0,0481$
-3	$-\frac{2}{9}$	$-0,0988$	$-0,0878$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$-0,163$	$-0,187$
-2	$-\frac{2}{5}$	$-0,32$	$-0,512$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,889$	$-2,37$
-1	-2	$-8,04$	$-64,3$
$-\frac{1}{2}$	2	$-8,04$	$64,3$
0	$\frac{2}{3}$	$-0,889$	$2,37$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{2}{3}$	$-0,889$	$2,37$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-0,32$	$0,512$
1	$\frac{2}{7}$	$-0,163$	$0,187$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$-0,0988$	$0,0878$
2	$\frac{2}{11}$	$-0,0661$	$0,0481$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$-0,0473$	$0,0291$
3	$\frac{2}{15}$	$-0,0356$	$0,019$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{17}$	$-0,0277$	$0,013$
4	$\frac{2}{19}$	$-0,0222$	$0,00933$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{21}$	$-0,0181$	$0,00691$
5	$\frac{2}{23}$	$-0,0151$	$0,00526$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{25}$	$-0,0128$	$0,0041$
6	$\frac{2}{27}$	$-0,011$	$0,00325$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{29}$	$-0,00951$	$0,00262$
7	$\frac{2}{31}$	$-0,00832$	$0,00215$

Aufgabe (6)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$x_1 = 0;\quad$ 2-fache Nullstelle

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{0 - 2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{-2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{-2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{-2x}{x^4}$

$= \frac{-2}{x^3}$

$= \frac{-2}{x^3}$

$f''(x) = \frac{0 \cdot x^3 - (-2) \cdot 3x^2}{(x^3)^2}$

$= \frac{0 - (-6x^2)}{(x^3)^2}$

$= \frac{6x^2}{(x^3)^2}$

$= \frac{6x^2}{(x^3)^2}$

$= \frac{6x^2}{x^6}$

$= \frac{6}{x^4}$

$= \frac{6}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$1 = 0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2(1)} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = \infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{-2}{x^3} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$
Zaehler $= 0$
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_2 = 0; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

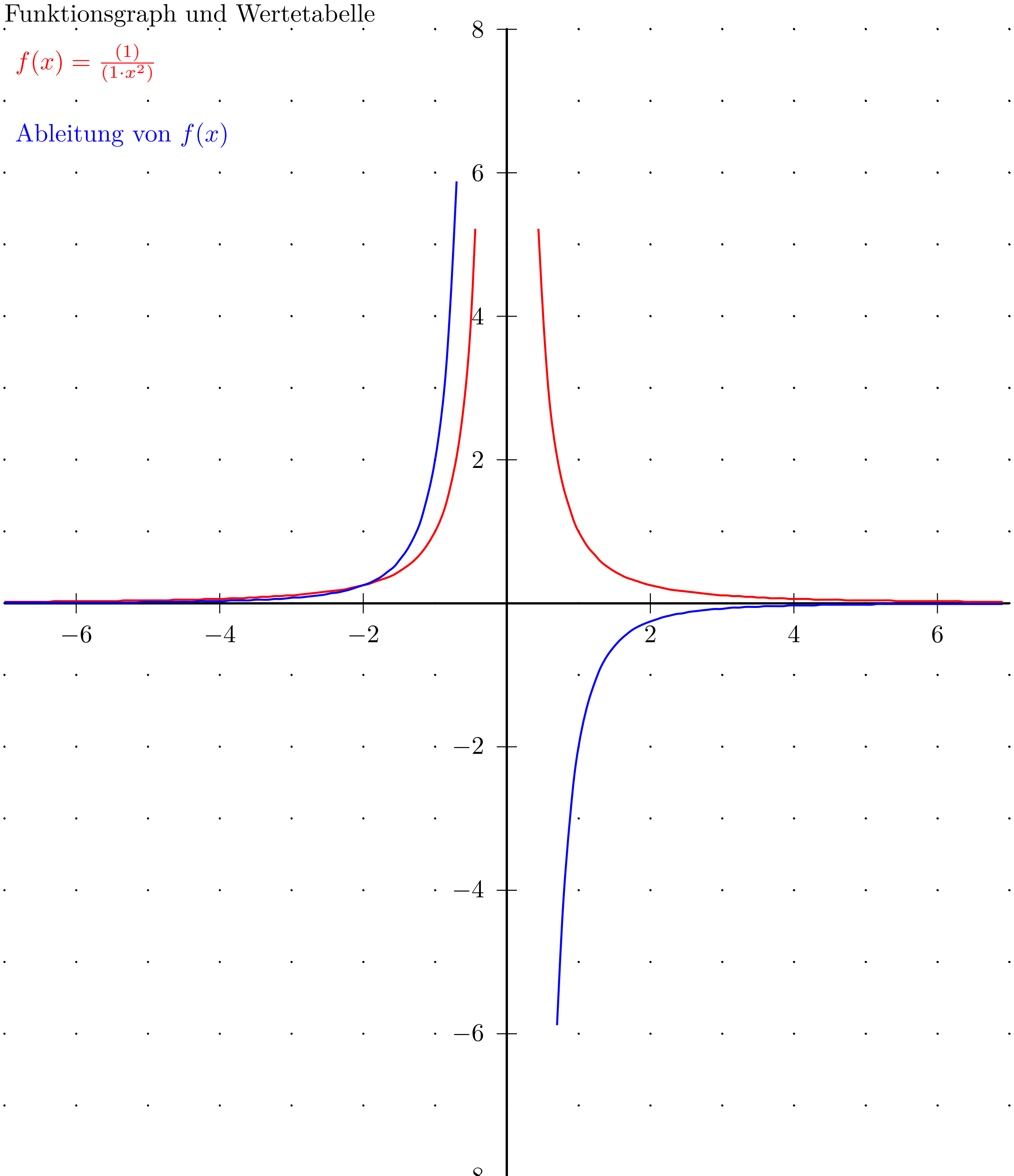
• Kruemmung
$f''(x) = \dfrac{6}{x^4}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_3 = 0; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{49}$	$0,00583$	$0,0025$
$-6\frac{1}{2}$	$0,0237$	$0,00728$	$0,00336$
-6	$\frac{1}{36}$	$0,00926$	$0,00463$
$-5\frac{1}{2}$	$0,0331$	$0,012$	$0,00656$
-5	$\frac{1}{25}$	$0,016$	$0,0096$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{4}{81}$	$0,0219$	$0,0146$
-4	$\frac{1}{16}$	$0,0313$	$0,0234$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{4}{49}$	$0,0466$	$0,04$
-3	$\frac{1}{9}$	$0,0741$	$0,0741$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{25}$	$0,128$	$0,154$
-2	$\frac{1}{4}$	$0,25$	$0,375$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$0,593$	$1,19$
-1	1	2	6
$-\frac{1}{2}$	4	16	$96,2$
0	$+unendlich$	0	$-unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$+unendlich$	0	$-unendlich$
$\frac{1}{2}$	4	-16	$96,2$
1	1	-2	6
$1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$	$-0,593$	$1,19$
2	$\frac{1}{4}$	$-0,25$	$0,375$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{25}$	$-0,128$	$0,154$
3	$\frac{1}{9}$	$-0,0741$	$0,0741$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{4}{49}$	$-0,0466$	$0,04$
4	$\frac{1}{16}$	$-0,0313$	$0,0234$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{4}{81}$	$-0,0219$	$0,0146$
5	$\frac{1}{25}$	$-0,016$	$0,0096$
$5\frac{1}{2}$	$0,0331$	$-0,012$	$0,00656$
6	$\frac{1}{36}$	$-0,00926$	$0,00463$
$6\frac{1}{2}$	$0,0237$	$-0,00728$	$0,00336$
7	$\frac{1}{49}$	$-0,00583$	$0,0025$

Aufgabe (7)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-1}{x^2}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\underline{x_1 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-1}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \frac{-1}{x^2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{0 \cdot x^2 - (-1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{0 - (-2x)}{(x^2)^2}$

$= \frac{2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{2x}{(x^2)^2}$

$= \frac{2x}{x^4}$

$= \frac{2}{x^3}$

$= \frac{2}{x^3}$

$f''(x) = \frac{0 \cdot x^3 - 2 \cdot 3x^2}{(x^3)^2}$

$= \frac{0 - 6x^2}{(x^3)^2}$

$= \frac{-6x^2}{(x^3)^2}$

$= \frac{-6x^2}{(x^3)^2}$

$= \frac{-6x^2}{x^6}$

$= \frac{-6}{x^4}$

$= \frac{-6}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-1 = 0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{(-1)}{x^2(1)} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{-1}{x^2} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-1}{x^2} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{2}{x^3} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{2}{x^3}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_2 = 0; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

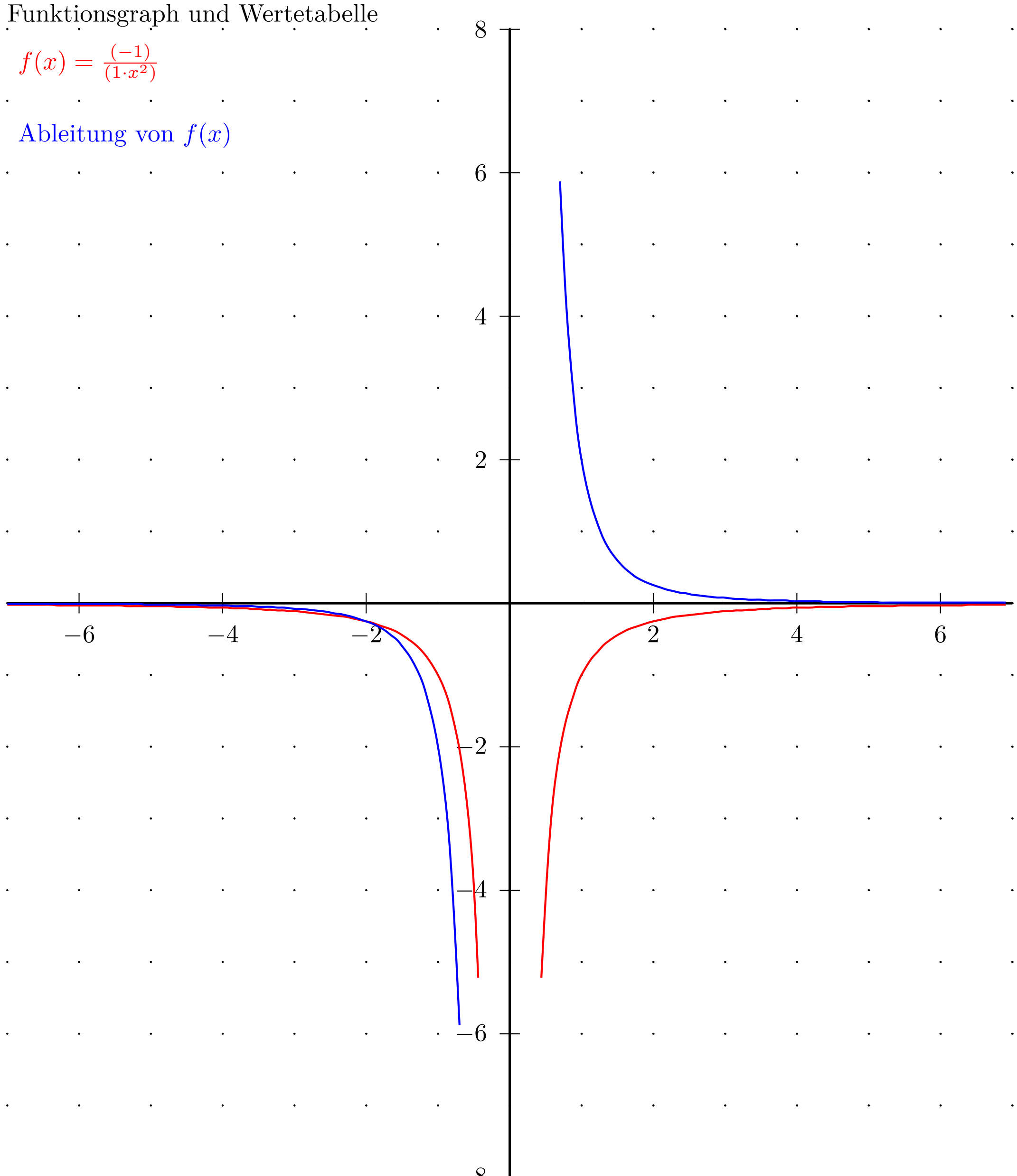
• Kruemmung
$f''(x) = \frac{-6}{x^4}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_3 = 0; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{1}{49}$	$-0,00583$	$-0,0025$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,0237$	$-0,00728$	$-0,00336$
-6	$-\frac{1}{36}$	$-0,00926$	$-0,00463$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,0331$	$-0,012$	$-0,00656$
-5	$-\frac{1}{25}$	$-0,016$	$-0,0096$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,0219$	$-0,0146$
-4	$-\frac{1}{16}$	$-0,0313$	$-0,0234$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{49}$	$-0,0466$	$-0,04$
-3	$-\frac{1}{9}$	$-0,0741$	$-0,0741$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{25}$	$-0,128$	$-0,154$
-2	$-\frac{1}{4}$	$-0,25$	$-0,375$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{9}$	$-0,593$	$-1,19$
-1	-1	-2	-6
$-\frac{1}{2}$	-4	-16	$-96,2$
0	$-unendlich$	0	$+unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-unendlich$	0	$+unendlich$
$\frac{1}{2}$	-4	16	$-96,2$
1	-1	2	-6
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{9}$	$0,593$	$-1,19$
2	$-\frac{1}{4}$	$0,25$	$-0,375$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{25}$	$0,128$	$-0,154$
3	$-\frac{1}{9}$	$0,0741$	$-0,0741$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{49}$	$0,0466$	$-0,04$
4	$-\frac{1}{16}$	$0,0313$	$-0,0234$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{81}$	$0,0219$	$-0,0146$
5	$-\frac{1}{25}$	$0,016$	$-0,0096$
$5\frac{1}{2}$	$-0,0331$	$0,012$	$-0,00656$
6	$-\frac{1}{36}$	$0,00926$	$-0,00463$
$6\frac{1}{2}$	$-0,0237$	$0,00728$	$-0,00336$
7	$-\frac{1}{49}$	$0,00583$	$-0,0025$

Aufgabe (8)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{3}{x^2+4}$

Nenner faktorisieren:

$x^2+4=0$

$1x^2+4=0 \qquad / -4$

$1x^2=-4 \qquad / :1$

$x^2=\dfrac{-4}{1}$

keine Lösung

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{3}{(x^2+4)}$

• Definitionsbereich: $\qquad \mathbb{D}=\mathbb{R}$

$f(x) = \dfrac{3}{x^2+4}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{0 \cdot (x^2+4) - 3 \cdot 2x}{(x^2+4)^2}$

$= \dfrac{0-6x}{(x^2+4)^2}$

$= \dfrac{-6x}{(x^2+4)^2}$

$= \dfrac{-6x}{(x^2+4)^2}$

$f''(x) = \dfrac{(-6) \cdot (x^4+8x^2+16) - (-6x) \cdot (4x^3+16x)}{(x^4+8x^2+16)^2}$

$= \dfrac{(-6x^4-48x^2-96) - (-24x^4-96x^2)}{(x^4+8x^2+16)^2}$

$= \dfrac{18x^4+48x^2-96}{(x^4+8x^2+16)^2}$

$= \dfrac{18x^4+48x^2-96}{(x^4+8x^2+16)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$3=0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

kein Vorzeichenwechsel

$x \in \mathbb{R} \qquad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3}{x^2(1+\frac{4}{x^2})} = 0$

Horizontale Asymptote: $y=0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{-6x}{x^4 + 8x^2 + 16} = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = -\frac{3}{8}$
$f''(0) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0/\frac{3}{4})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-6x}{x^4 + 8x^2 + 16}$
Zaehler $= 0$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{18x^4 + 48x^2 - 96}{x^8 + 16x^6 + 96x^4 + 256x^2 + 256}$
$Zaehler = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$18u^2 + 48u - 96 = 0$

$u_{1/2} = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot 18 \cdot (-96)}}{2 \cdot 18}$
$u_{1/2} = \frac{-48 \pm \sqrt{9,22 \cdot 10^3}}{36}$
$u_{1/2} = \frac{-48 \pm 96}{36}$
$u_1 = \frac{-48 + 96}{36} \qquad u_2 = \frac{-48 - 96}{36}$
$u_1 = 1\frac{1}{3} \qquad u_2 = -4$
$x^2 = 1\frac{1}{3}$
$x = \pm\sqrt{1\frac{1}{3}}$
$x_1 = 1,15 \qquad x_2 = -1,15$
$x^2 = -4x = \pm\sqrt{-4}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_3 = -1,15; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 1,15; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

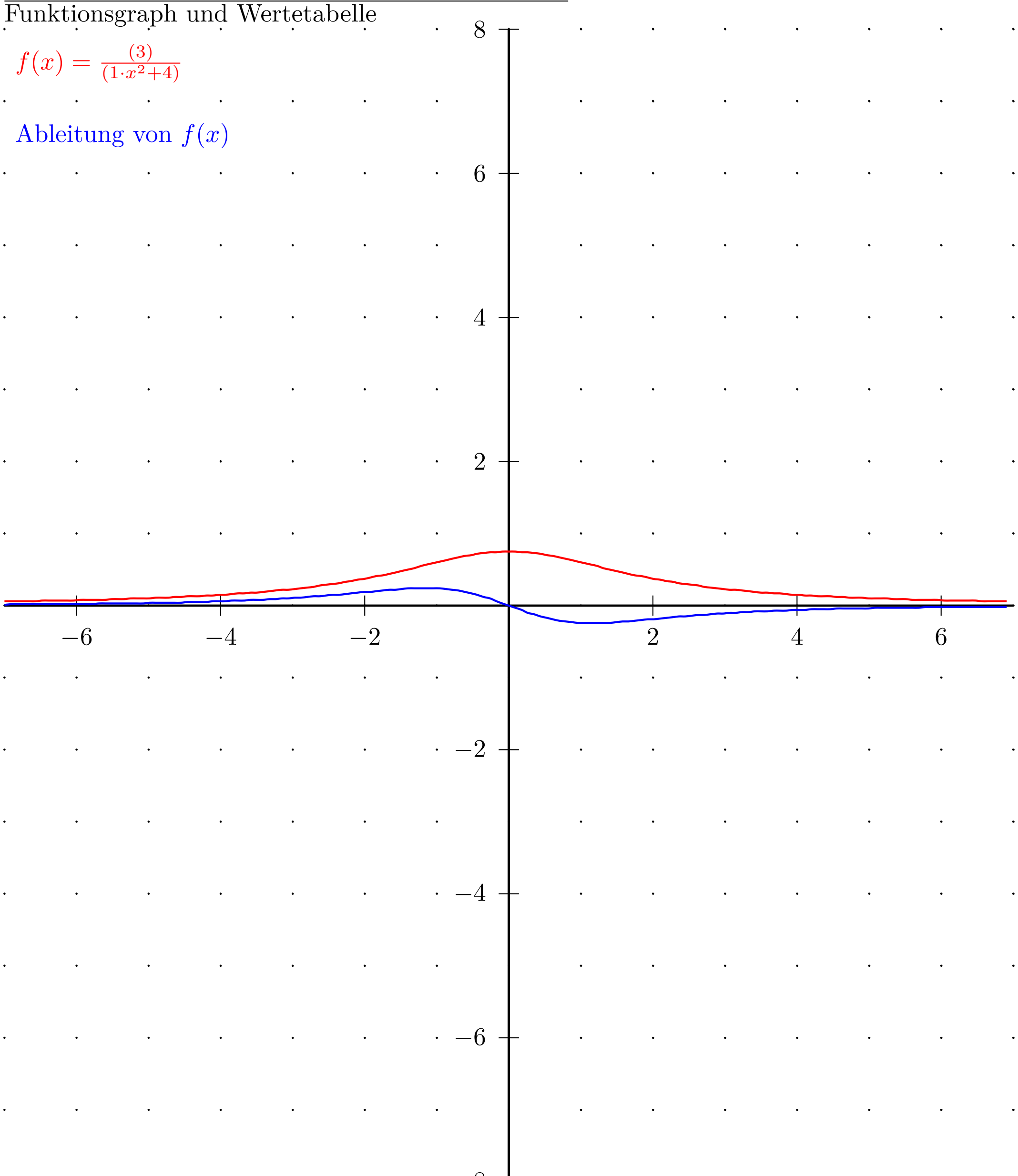
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	$-1,15$	$< x <$	$1,15$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1,15[\quad \cup \quad]1,15; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$x \in]-1,15;1,15[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{3}{53}$	$0,015$	$0,00576$
$-6\frac{1}{2}$	$0,0649$	$0,0182$	$0,00744$
-6	$\frac{3}{40}$	$0,0225$	$0,00975$
$-5\frac{1}{2}$	$0,0876$	$0,0281$	$0,013$
-5	$\frac{3}{29}$	$0,0357$	$0,0175$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{12}{97}$	$0,0459$	$0,0239$
-4	$\frac{3}{20}$	$0,06$	$0,033$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{12}{65}$	$0,0795$	$0,0458$
-3	$\frac{3}{13}$	$0,107$	$0,0628$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{12}{41}$	$0,143$	$0,0822$
-2	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	$0,0937$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{12}{25}$	$0,23$	$0,0676$
-1	$\frac{3}{5}$	$0,24$	$-0,048$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{12}{17}$	$0,166$	$-0,254$
0	$\frac{3}{4}$	0	$-0,375$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{3}{4}$	0	$-0,375$
$\frac{1}{2}$	$\frac{12}{17}$	$-0,166$	$-0,254$
1	$\frac{3}{5}$	$-0,24$	$-0,048$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{12}{25}$	$-0,23$	$0,0676$
2	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{16}$	$0,0937$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{12}{41}$	$-0,143$	$0,0822$
3	$\frac{3}{13}$	$-0,107$	$0,0628$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{12}{65}$	$-0,0795$	$0,0458$
4	$\frac{3}{20}$	$-0,06$	$0,033$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{12}{97}$	$-0,0459$	$0,0239$
5	$\frac{3}{29}$	$-0,0357$	$0,0175$
$5\frac{1}{2}$	$0,0876$	$-0,0281$	$0,013$
6	$\frac{3}{40}$	$-0,0225$	$0,00975$
$6\frac{1}{2}$	$0,0649$	$-0,0182$	$0,00744$
7	$\frac{3}{53}$	$-0,015$	$0,00576$

Aufgabe (9)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-4}{x^2-4}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 - 4 = 0$

$1x^2 - 4 = 0 \qquad / + 4$

$1x^2 = 4 \qquad / : 1$

$x^2 = \frac{4}{1}$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_1 = -2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-4}{(x+2)(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

$f(x) = \frac{-4}{x^2-4}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2-4) - (-4) \cdot 2x}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{0 - (-8x)}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{8x}{(x^2-4)^2}$

$= \frac{8x}{(x^2-4)^2}$

$f''(x) = \frac{8 \cdot (x^4 - 8x^2 + 16) - 8x \cdot (4x^3 - 16x)}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$

$= \frac{(8x^4 - 64x^2 + 128) - (32x^4 - 128x^2)}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$

$= \frac{-24x^4 + 64x^2 + 128}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$

$= \frac{-24x^4 + 64x^2 + 128}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-4 = 0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-2; 2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(-4)}{x^2(1-\dfrac{4}{x^2})} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x\to-2^+} \dfrac{-4}{(x+2)(x-2)} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-2^-} \dfrac{-4}{(x+2)(x-2)} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$
$\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{-4}{(x+2)(x-2)} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{-4}{(x+2)(x-2)} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{8x}{x^4-8x^2+16} = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = \dfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/1)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \dfrac{8x}{x^4-8x^2+16}$
Zaehler $= 0$
$\underline{x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_5 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]0;2[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]-2;0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung
$f''(x) = \dfrac{-24x^4+64x^2+128}{x^8-16x^6+96x^4-256x^2+256}$
$Zaehler = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$-24u^2 + 64u + 128 = 0$

$u_{1/2} = \dfrac{-64 \pm \sqrt{64^2 - 4 \cdot (-24) \cdot 128}}{2 \cdot (-24)}$
$u_{1/2} = \dfrac{-64 \pm \sqrt{1,64 \cdot 10^4}}{-48}$
$u_{1/2} = \dfrac{-64 \pm 128}{-48}$
$u_1 = \dfrac{-64+128}{-48} \qquad u_2 = \dfrac{-64-128}{-48}$

$u_1 = -1\frac{1}{3} \qquad u_2 = 4$
$x^2 = -1\frac{1}{3} x = \pm\sqrt{-1\frac{1}{3}}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_7 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

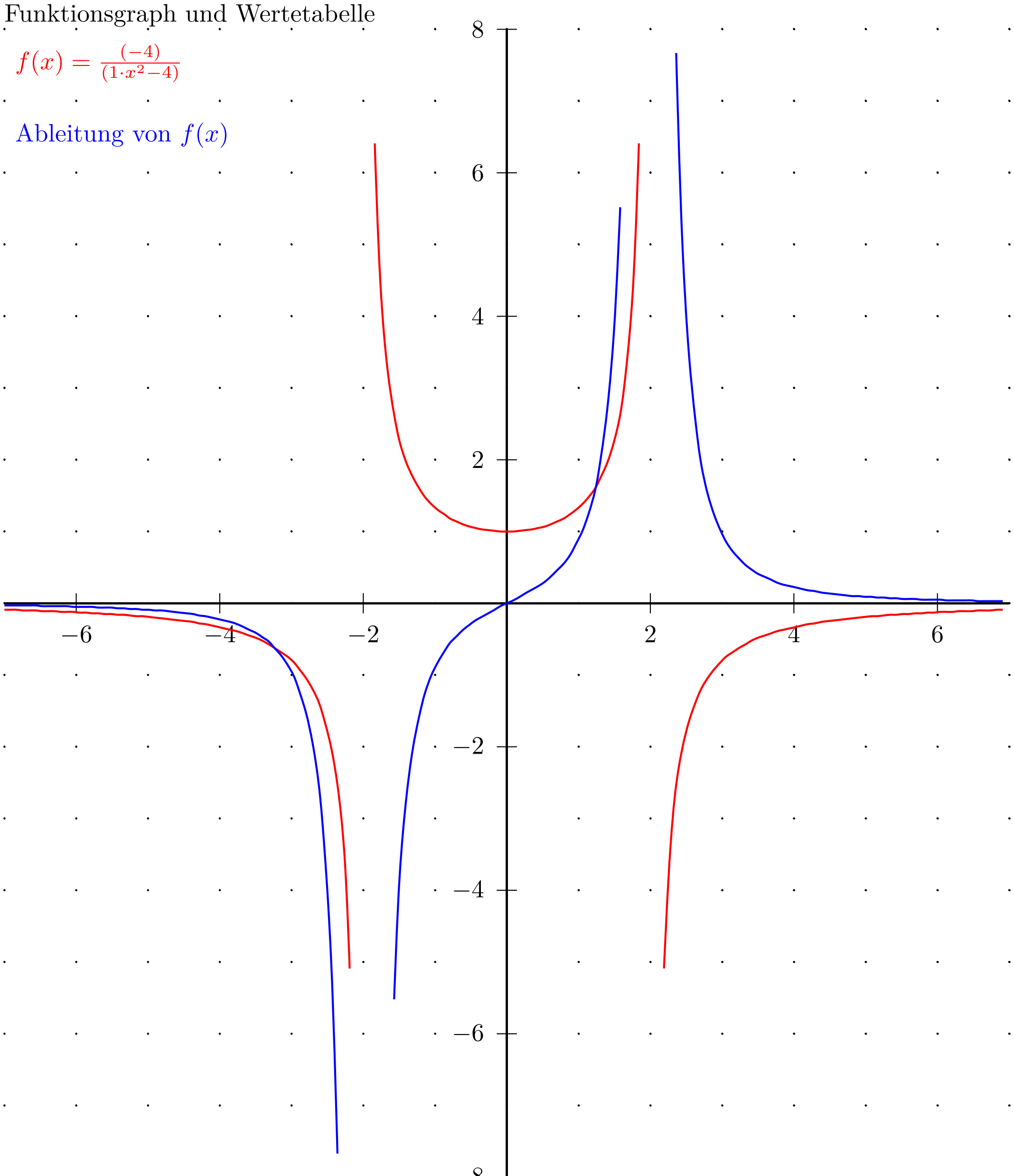
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_9 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_10 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-2	$< x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-2;2[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{4}{45}$	$-0,0277$	$-0,0133$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,105$	$-0,0355$	$-0,0187$
-6	$-\frac{1}{8}$	$-0,0469$	$-0,0273$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,152$	$-0,0639$	$-0,0419$
-5	$-\frac{4}{21}$	$-0,0907$	$-0,0682$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{16}{65}$	$-0,136$	$-0,121$
-4	$-\frac{1}{3}$	$-0,222$	$-0,241$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{16}{33}$	$-0,411$	$-0,581$
-3	$-\frac{4}{5}$	$-0,96$	$-1,98$
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{9}$	$-3,96$	-16
-2	$-unendlich$	$3,27 \cdot 10^3$	$+unendlich$
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{7}$	$-3,92$	$16,1$
-1	$1\frac{1}{3}$	$-0,889$	$2,07$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{15}$	$-0,284$	$0,721$
0	1	0	$0,5$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	0	$0,5$
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{15}$	$0,284$	$0,721$
1	$1\frac{1}{3}$	$0,889$	$2,07$
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{7}$	$3,92$	$16,1$
2	$-unendlich$	$-3,27 \cdot 10^3$	$+unendlich$
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{9}$	$3,96$	-16
3	$-\frac{4}{5}$	$0,96$	$-1,98$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{16}{33}$	$0,411$	$-0,581$
4	$-\frac{1}{3}$	$0,222$	$-0,241$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{16}{65}$	$0,136$	$-0,121$
5	$-\frac{4}{21}$	$0,0907$	$-0,0682$
$5\frac{1}{2}$	$-0,152$	$0,0639$	$-0,0419$
6	$-\frac{1}{8}$	$0,0469$	$-0,0273$
$6\frac{1}{2}$	$-0,105$	$0,0355$	$-0,0187$
7	$-\frac{4}{45}$	$0,0277$	$-0,0133$

Aufgabe (10)

•Funktion/Faktorisieren

$f\left(x\right)=\dfrac{\frac{1}{5}}{x^2+2x+1}$

Nenner faktorisieren:

$x^2+2x+1=0$

$1x^2+2x+1=0$

$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$

$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm0}{2}$

$x_1=\dfrac{-2+0}{2}\qquad x_2=\dfrac{-2-0}{2}$

$x_1=-1\qquad x_2=-1$

$\underline{x_1=-1;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f\left(x\right)=\dfrac{\frac{1}{5}}{(x+1)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f\left(x\right)=\dfrac{\frac{1}{5}}{x^2+2x+1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'\left(x\right)=\dfrac{0\cdot(x^2+2x+1)-\frac{1}{5}\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$

$=\dfrac{0-(\frac{2}{5}x+\frac{2}{5})}{(x^2+2x+1)^2}$

$=\dfrac{-\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}}{(x^2+2x+1)^2}$

$=\dfrac{-\frac{2}{5}x-\frac{2}{5}}{(x^2+2x+1)^2}$

$=\dfrac{-\frac{2}{5}(x+1)}{(x+1)^4}$

$=\dfrac{-\frac{2}{5}}{(x+1)^3}$

$=\dfrac{-\frac{2}{5}}{x^3+3x^2+3x+1}$

$f''\left(x\right)=\dfrac{0\cdot(x^3+3x^2+3x+1)-(-\frac{2}{5})\cdot(3x^2+6x+3)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$=\dfrac{0-(-1\frac{1}{5}x^2-2\frac{2}{5}x-1\frac{1}{5})}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$=\dfrac{1\frac{1}{5}x^2+2\frac{2}{5}x+1\frac{1}{5}}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$=\dfrac{1\frac{1}{5}x^2+2\frac{2}{5}x+1\frac{1}{5}}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler=0$

$\dfrac{1}{5}=0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{5}}{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{\frac{1}{5}}{(x+1)^2} = \infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{\frac{1}{5}}{(x+1)^2} = \infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{-\frac{2}{5}}{x^3+3x^2+3x+1} = 0$$

keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$$f'(x) = \frac{-\frac{2}{5}}{x^3+3x^2+3x+1}$$

Zaehler $= 0$

keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_2 = -1;$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -1[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-1; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{1\frac{1}{5}x^2+2\frac{2}{5}x+1\frac{1}{5}}{x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1}$$

$Zaehler = 0$

$$1\frac{1}{5}x^2+2\frac{2}{5}x+1\frac{1}{5} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2\frac{2}{5} \pm \sqrt{2\frac{2}{5}^2 - 4\cdot 1\frac{1}{5}\cdot 1\frac{1}{5}}}{2\cdot 1\frac{1}{5}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2\frac{2}{5} \pm \sqrt{0}}{2\frac{2}{5}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-2\frac{2}{5} \pm 0}{2\frac{2}{5}}$$

$x_1 = \dfrac{-2\frac{2}{5} + 0}{2\frac{2}{5}} \qquad x_2 = \dfrac{-2\frac{2}{5} - 0}{2\frac{2}{5}}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_3 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

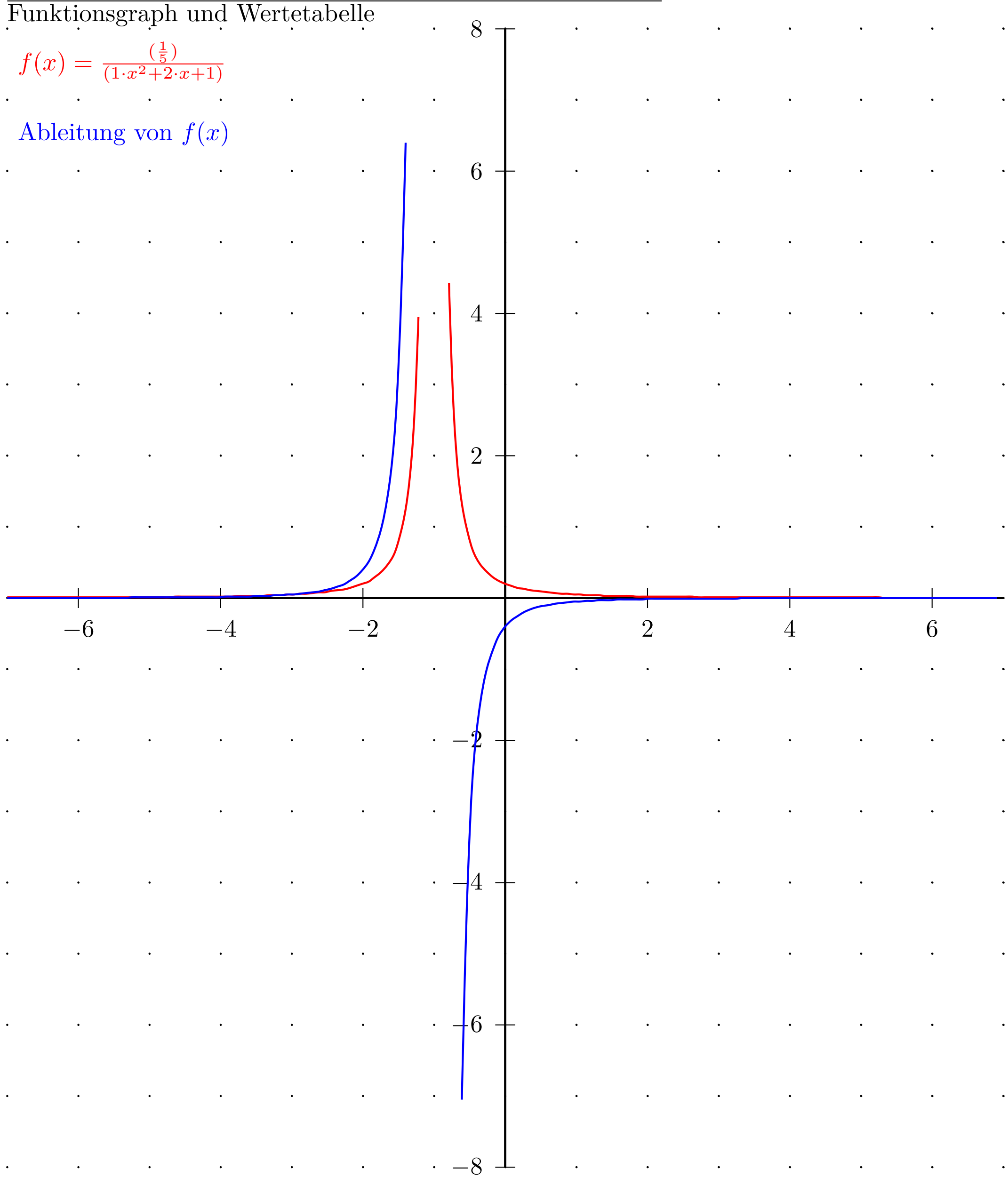
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_4 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$0,00556$	$0,00185$	$0,000926$
$-6\frac{1}{2}$	$0,00661$	$0,0024$	$0,00131$
-6	$0,008$	$0,0032$	$0,00192$
$-5\frac{1}{2}$	$0,00988$	$0,00439$	$0,00293$
-5	$\frac{1}{80}$	$0,00625$	$0,00469$
$-4\frac{1}{2}$	$0,0163$	$0,00933$	$0,008$
-4	$\frac{1}{45}$	$0,0148$	$0,0148$
$-3\frac{1}{2}$	$0,032$	$0,0256$	$0,0307$
-3	$\frac{1}{20}$	$0,05$	$0,075$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{4}{45}$	$0,119$	$0,237$
-2	$\frac{1}{5}$	$0,4$	$1,2$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$3,21$	$19,2$
-1	$+unendlich$	0	$-unendlich$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$-3,21$	$19,2$
0	$\frac{1}{5}$	$-0,4$	$1,2$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{5}$	$-0,4$	$1,2$
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{45}$	$-0,119$	$0,237$
1	$\frac{1}{20}$	$-0,05$	$0,075$
$1\frac{1}{2}$	$0,032$	$-0,0256$	$0,0307$
2	$\frac{1}{45}$	$-0,0148$	$0,0148$
$2\frac{1}{2}$	$0,0163$	$-0,00933$	$0,008$
3	$\frac{1}{80}$	$-0,00625$	$0,00469$
$3\frac{1}{2}$	$0,00988$	$-0,00439$	$0,00293$
4	$0,008$	$-0,0032$	$0,00192$
$4\frac{1}{2}$	$0,00661$	$-0,0024$	$0,00131$
5	$0,00556$	$-0,00185$	$0,000926$
$5\frac{1}{2}$	$0,00473$	$-0,00146$	$0,000672$
6	$0,00408$	$-0,00117$	$0,0005$
$6\frac{1}{2}$	$0,00356$	$-0,000948$	$0,000379$
7	$0,00313$	$-0,000781$	$0,000293$

Aufgabe (11)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-1\frac{1}{2}}{x^2-6x+9}$

Nenner faktorisieren:

$x^2-6x+9=0$

$1x^2-6x+9=0$

$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{6 \pm 0}{2}$

$x_1 = \frac{6+0}{2} \qquad x_2 = \frac{6-0}{2}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$

$\underline{x_1 = 3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-1\frac{1}{2}}{(x-3)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$f(x) = \frac{-1\frac{1}{2}}{x^2-6x+9}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{0\cdot(x^2-6x+9)-(-1\frac{1}{2})\cdot(2x-6)}{(x^2-6x+9)^2}$

$= \frac{0-(-3x+9)}{(x^2-6x+9)^2}$

$= \frac{3x-9}{(x^2-6x+9)^2}$

$= \frac{3x-9}{(x^2-6x+9)^2}$

$= \frac{3(x-3)}{(x-3)^4}$

$= \frac{3}{(x-3)^3}$

$= \frac{3}{x^3-9x^2+27x-27}$

$f''(x) = \frac{0\cdot(x^3-9x^2+27x-27)-3\cdot(3x^2-18x+27)}{(x^3-9x^2+27x-27)^2}$

$= \frac{0-(9x^2-54x+81)}{(x^3-9x^2+27x-27)^2}$

$= \frac{-9x^2+54x-81}{(x^3-9x^2+27x-27)^2}$

$= \frac{-9x^2+54x-81}{(x^3-9x^2+27x-27)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-1\frac{1}{2} = 0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	3	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; 3[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(-1\frac{1}{2})}{x^2(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2})} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{-1\frac{1}{2}}{(x-3)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{-1\frac{1}{2}}{(x-3)^2} = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 3$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{3}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27} = 0$$

keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$$f'(x) = \frac{3}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$$

Zaehler $= 0$

keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_2 = 3; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]3; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 3[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{-9x^2 + 54x - 81}{x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1,22 \cdot 10^3 x^2 - 1,46 \cdot 10^3 x + 729}$$

$Zaehler = 0$

$$-9x^2 + 54x - 81 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot (-9) \cdot (-81)}}{2 \cdot (-9)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-54 \pm \sqrt{0}}{-18}$$

$$x_{1/2} = \frac{-54 \pm 0}{-18}$$

$$x_1 = \frac{-54 + 0}{-18} \qquad x_2 = \frac{-54 - 0}{-18}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$$

$x_3 = 3;\quad$ 2-fache Nullstelle

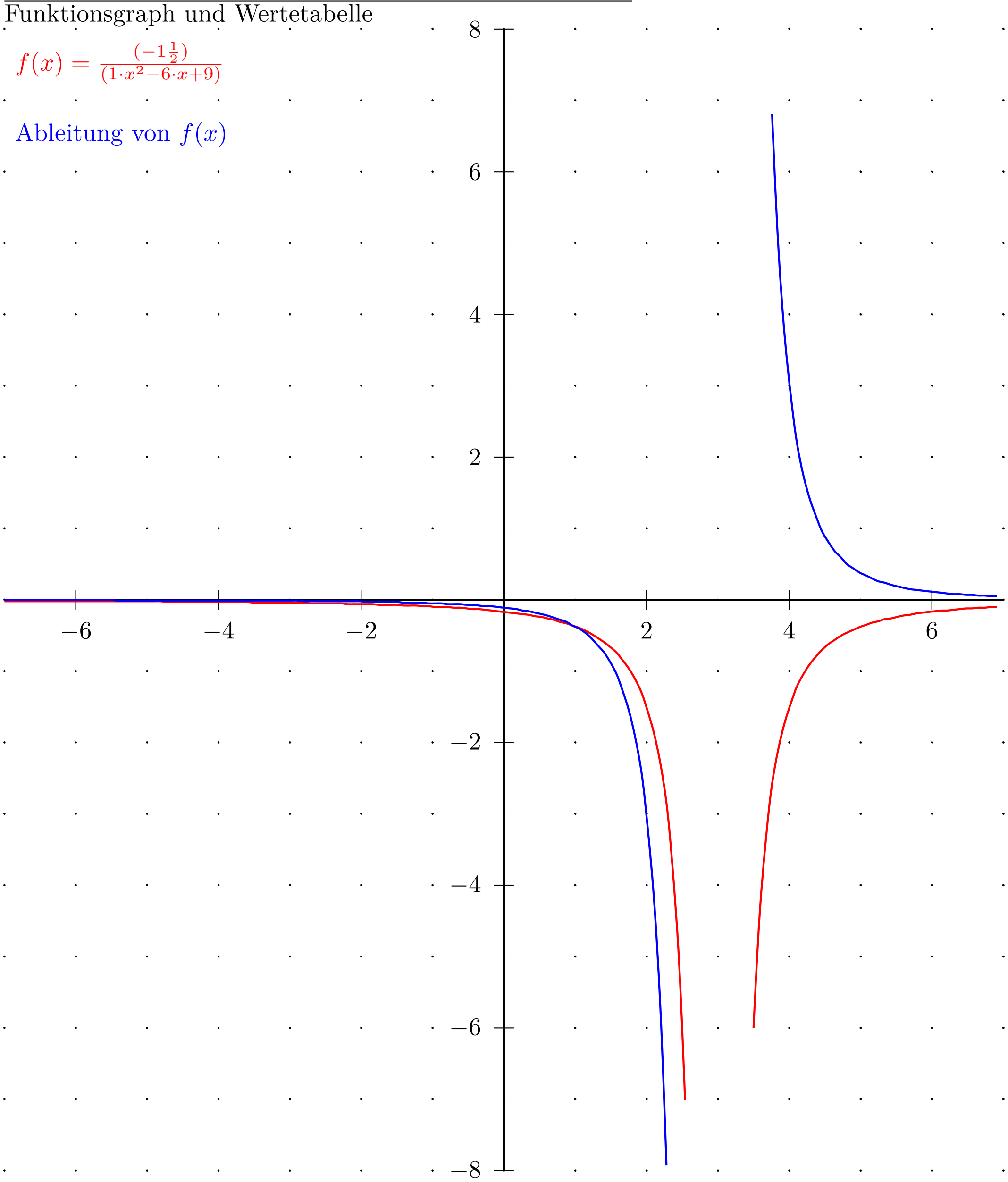
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_4 = 3;\quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	3	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; 3[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-0,015$	$-0,003$	$-0,0009$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,0166$	$-0,0035$	$-0,0011$
-6	$-\frac{1}{54}$	$-0,00412$	$-0,00137$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,0208$	$-0,00489$	$-0,00172$
-5	$-0,0234$	$-0,00586$	$-0,0022$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{75}$	$-0,00711$	$-0,00284$
-4	$-\frac{3}{98}$	$-0,00875$	$-0,00375$
$-3\frac{1}{2}$	$-0,0355$	$-0,0109$	$-0,00504$
-3	$-\frac{1}{24}$	$-\frac{1}{72}$	$-0,00694$
$-2\frac{1}{2}$	$-0,0496$	$-0,018$	$-0,00984$
-2	$-\frac{3}{50}$	$-0,024$	$-0,0144$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{27}$	$-0,0329$	$-0,0219$
-1	$-\frac{3}{32}$	$-0,0469$	$-0,0352$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{6}{49}$	$-0,07$	$-0,06$
0	$-\frac{1}{6}$	$-0,111$	$-0,111$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\frac{1}{6}$	$-0,111$	$-0,111$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{6}{25}$	$-0,192$	$-0,23$
1	$-\frac{3}{8}$	$-0,375$	$-0,563$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,889$	$-1,78$
2	$-1\frac{1}{2}$	-3	-9
$2\frac{1}{2}$	-6	$-24,1$	-144
3	$-unendlich$	0	$+unendlich$
$3\frac{1}{2}$	-6	$24,1$	-144
4	$-1\frac{1}{2}$	3	-9
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$0,889$	$-1,78$
5	$-\frac{3}{8}$	$0,375$	$-0,563$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{6}{25}$	$0,192$	$-0,23$
6	$-\frac{1}{6}$	$0,111$	$-0,111$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{6}{49}$	$0,07$	$-0,06$
7	$-\frac{3}{32}$	$0,0469$	$-0,0352$

Aufgabe (12)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{9x}{x^2+3}$

Zaehler faktorisieren:

$9x = 0$

$x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 + 3 = 0$

$1x^2 + 3 = 0 \qquad / - 3$

$1x^2 = -3 \qquad / : 1$

$x^2 = \frac{-3}{1}$

keine Lösung

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{9x}{(x^2+3)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{9x}{x^2+3}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{9 \cdot (x^2+3) - 9x \cdot 2x}{(x^2+3)^2}$

$= \frac{(9x^2+27) - 18x^2}{(x^2+3)^2}$

$= \frac{-9x^2+27}{(x^2+3)^2}$

$= \frac{-9x^2+27}{(x^2+3)^2}$

$f''(x) = \frac{(-18x) \cdot (x^4+6x^2+9) - (-9x^2+27) \cdot (4x^3+12x)}{(x^4+6x^2+9)^2}$

$= \frac{(-18x^5 - 108x^3 - 162x) - (-36x^5 + 324x)}{(x^4+6x^2+9)^2}$

$= \frac{18x^5 - 108x^3 - 486x}{(x^4+6x^2+9)^2}$

$= \frac{18x^5 - 108x^3 - 486x}{(x^4+6x^2+9)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$9x = 0$

$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x(9)}{x^2(1+\frac{3}{x^2})} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{-9x^2+27}{x^4+6x^2+9} = 0$

$-9x^2 + 27 = 0 \qquad / -27$
$-9x^2 = -27 \qquad / : (-9)$
$x^2 = \dfrac{-27}{-9}$
$x = \pm\sqrt{3}$
$x_1 = 1,73 \qquad x_2 = -1,73$
$\underline{x_3 = -1,73;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 1,73;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1,73) = 0,866 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1,73/-2,6)}$
$f''(1,73) = -0,866$
$f''(1,73) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1,73/2,6)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \dfrac{-9x^2+27}{x^4+6x^2+9}$
Zaehler $= 0$
$\underline{x_5 = -1,73;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 1,73;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	$-1,73$	$< x <$	$1,73$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-1,73; 1,73[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1,73[\quad \cup \quad]1,73; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung
$f''(x) = \dfrac{18x^5 - 108x^3 - 486x}{x^8 + 12x^6 + 54x^4 + 108x^2 + 81}$
$Zaehler = 0$
$x(18x^4 - 108x^2 - 486) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 18x^4 - 108x^2 - 486 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$18u^2 - 108u - 486 = 0$

$u_{1/2} = \dfrac{+108 \pm \sqrt{(-108)^2 - 4\cdot 18 \cdot (-486)}}{2\cdot 18}$
$u_{1/2} = \dfrac{+108 \pm \sqrt{4,67\cdot 10^4}}{36}$
$u_{1/2} = \dfrac{108 \pm 216}{36}$
$u_1 = \dfrac{108+216}{36} \qquad u_2 = \dfrac{108-216}{36}$
$u_1 = 9 \qquad u_2 = -3$
$x^2 = 9$

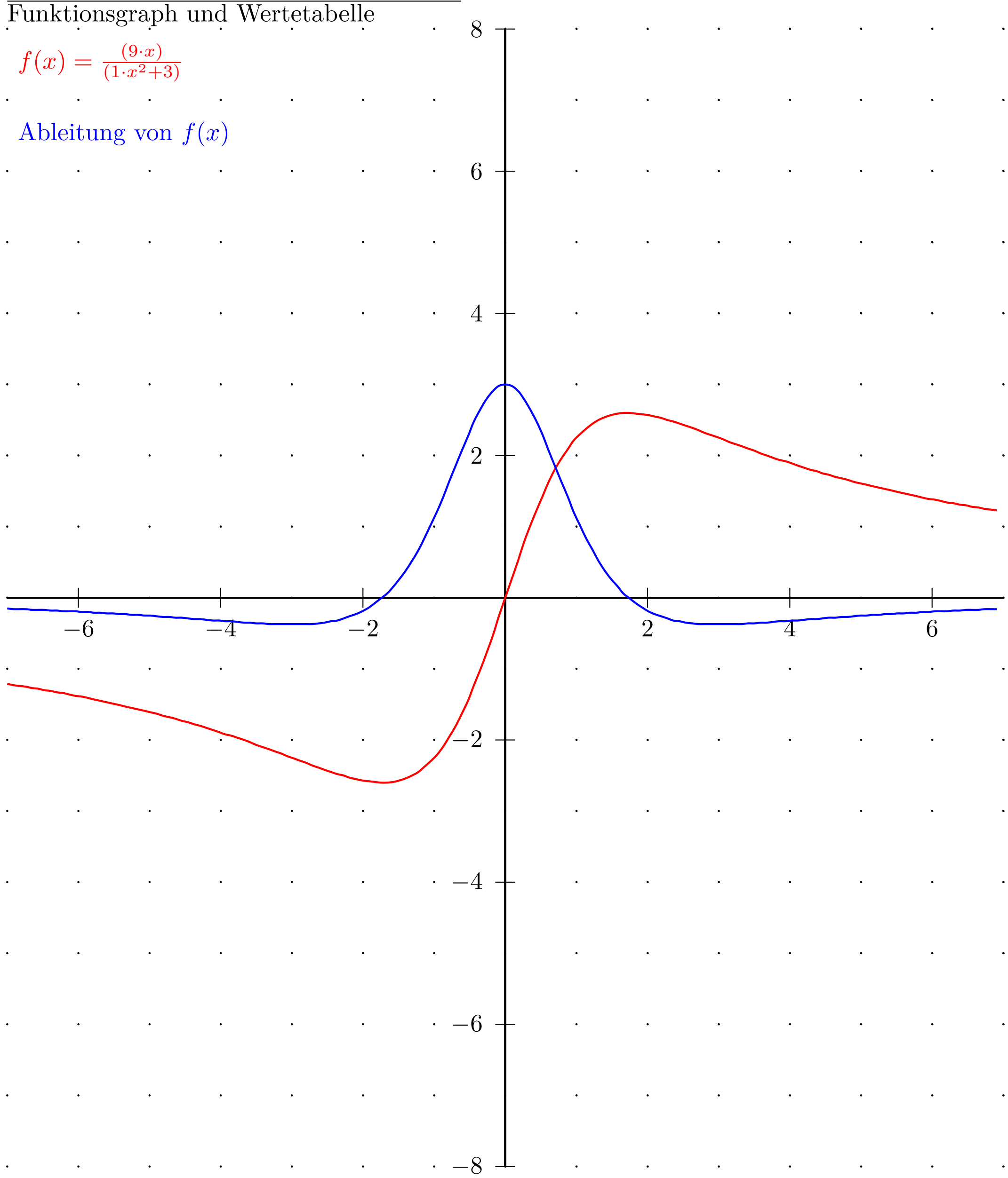
$x = \pm\sqrt{9}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$
$x^2 = -3x = \pm\sqrt{-3}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$x_7 = 0;$ 1-fache Nullstelle
$x_8 = 3;$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	0	$< x <$	3	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]0; 3[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt
Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-1\frac{11}{52}$	$-0,153$	$-0,0358$
$-6\frac{1}{2}$	$-1,29$	$-0,173$	$-0,042$
-6	$-1\frac{5}{13}$	$-0,195$	$-0,0492$
$-5\frac{1}{2}$	$-1,49$	$-0,222$	$-0,0572$
-5	$-1\frac{17}{28}$	$-0,253$	$-0,0656$
$-4\frac{1}{2}$	$-1\frac{23}{31}$	$-0,287$	$-0,0725$
-4	$-1\frac{17}{19}$	$-0,324$	$-0,0735$
$-3\frac{1}{2}$	$-2\frac{4}{61}$	$-0,358$	$-0,0577$
-3	$-2\frac{1}{4}$	$-0,375$	$9,57\cdot 10^{-6}$
$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{16}{37}$	$-0,342$	$0,156$
-2	$-2\frac{4}{7}$	$-0,184$	$0,525$
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{4}{7}$	$0,245$	$1,26$
-1	$-2\frac{1}{4}$	$1,13$	$2,25$
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{5}{13}$	$2,34$	$2,29$
0	0	3	0

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	3	0
$\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{13}$	$2,34$	$-2,29$
1	$2\frac{1}{4}$	$1,13$	$-2,25$
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{4}{7}$	$0,245$	$-1,26$
2	$2\frac{4}{7}$	$-0,184$	$-0,525$
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{16}{37}$	$-0,342$	$-0,156$
3	$2\frac{1}{4}$	$-0,375$	$-9,57\cdot 10^{-6}$
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{4}{61}$	$-0,358$	$0,0577$
4	$1\frac{17}{19}$	$-0,324$	$0,0735$
$4\frac{1}{2}$	$1\frac{23}{31}$	$-0,287$	$0,0725$
5	$1\frac{17}{28}$	$-0,253$	$0,0656$
$5\frac{1}{2}$	$1,49$	$-0,222$	$0,0572$
6	$1\frac{5}{13}$	$-0,195$	$0,0492$
$6\frac{1}{2}$	$1,29$	$-0,173$	$0,042$
7	$1\frac{11}{52}$	$-0,153$	$0,0358$

Aufgabe (13)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{x}{x^2}$
Zaehler faktorisieren:
$x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x^2 = 0$
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{x}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
• Term gekürzen
$f(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \frac{1}{x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{(x)^2}$
$= \frac{0 - 1}{(x)^2}$
$= \frac{-1}{(x)^2}$
$= \frac{-1}{(x)^2}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot x^2 - (-1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{0 - (-2x)}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x}{x^4}$
$= \frac{2}{x^3}$
$= \frac{2}{x^3}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$1 = 0$
keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$x \in]-\infty; 0[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x(1)}{x^2(1)} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-1}{x^2} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$
Zaehler $= 0$
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_3 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{2}{x^3}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

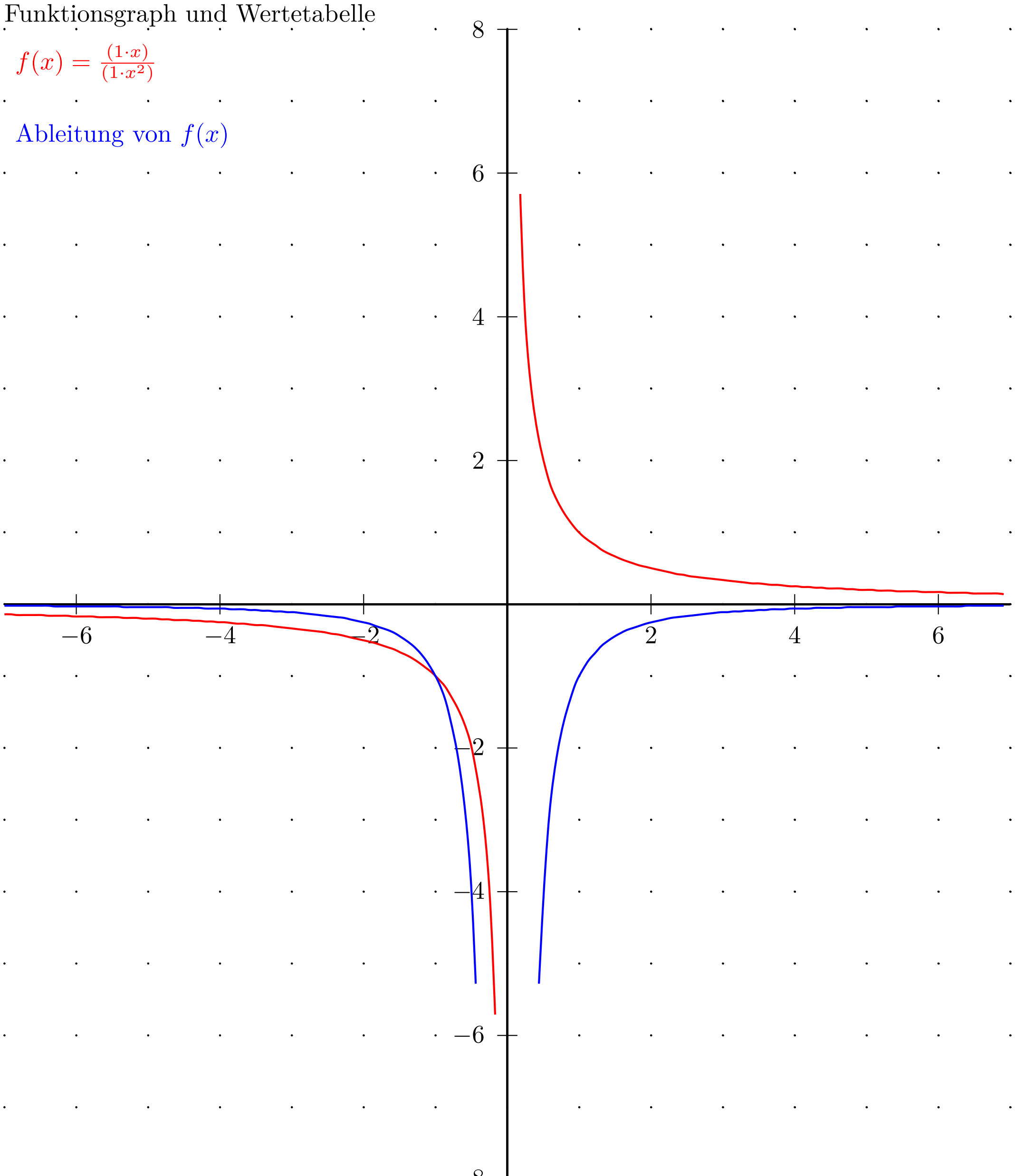
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_4 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$-0,00583$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{13}$	$-0,0237$	$-0,00728$
-6	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$-0,00926$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{11}$	$-0,0331$	$-0,012$
-5	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$-0,016$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,0219$
-4	$-\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$-\frac{1}{32}$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$-0,0466$
-3	$-\frac{1}{3}$	$-0,111$	$-0,0741$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$-0,16$	$-0,128$
-2	$-\frac{1}{2}$	$-0,25$	$-0,25$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,445$	$-0,593$
-1	-1	-1	-2
$-\frac{1}{2}$	-2	-4	-16
0	NaN	$3265\frac{15}{49}$	NaN

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	NaN	$3265\frac{15}{49}$	NaN
$\frac{1}{2}$	2	-4	16
1	1	-1	2
$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-0,445$	$0,593$
2	$\frac{1}{2}$	$-0,25$	$0,25$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-0,16$	$0,128$
3	$\frac{1}{3}$	$-0,111$	$0,0741$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$0,0466$
4	$\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$\frac{1}{32}$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$0,0219$
5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$0,016$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$-0,0331$	$0,012$
6	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$0,00926$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$-0,0237$	$0,00728$
7	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$0,00583$

Aufgabe (14)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{-3x+3}{2x^2+4x+2}$

Zaehler faktorisieren:

$-3x+3=0$

$-3x+3=0 \qquad /-3$

$-3x=-3 \qquad /:(-3)$

$x=\dfrac{-3}{-3}$

$x=1$

$\underline{x_1=1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$2x^2+4x+2=0$

$2x^2+4x+2=0$

$x_{1/2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot2\cdot2}}{2\cdot2}$

$x_{1/2}=\dfrac{-4\pm\sqrt{0}}{4}$

$x_{1/2}=\dfrac{-4\pm0}{4}$

$x_1=\dfrac{-4+0}{4} \qquad x_2=\dfrac{-4-0}{4}$

$x_1=-1 \qquad x_2=-1$

$\underline{x_2=-1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x)=\dfrac{-3(x-1)}{2(x+1)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f(x)=\dfrac{-1\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}}{x^2+2x+1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x)=\dfrac{(-1\frac{1}{2})\cdot(x^2+2x+1)-(-1\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2})\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$

$=\dfrac{(-1\frac{1}{2}x^2-3x-1\frac{1}{2})-(-3x^2+3)}{(x^2+2x+1)^2}$

$=\dfrac{1\frac{1}{2}x^2-3x-4\frac{1}{2}}{(x^2+2x+1)^2}$

$=\dfrac{1\frac{1}{2}x^2-3x-4\frac{1}{2}}{(x^2+2x+1)^2}$

$=\dfrac{1\frac{1}{2}(x+1)(x-3)}{(x+1)^4}$

$=\dfrac{1\frac{1}{2}(x-3)}{(x+1)^3}$

$=\dfrac{1\frac{1}{2}x-4\frac{1}{2}}{x^3+3x^2+3x+1}$

$f''(x)=\dfrac{1\frac{1}{2}\cdot(x^3+3x^2+3x+1)-(1\frac{1}{2}x-4\frac{1}{2})\cdot(3x^2+6x+3)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$=\dfrac{(1\frac{1}{2}x^3+4\frac{1}{2}x^2+4\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2})-(4\frac{1}{2}x^3-4\frac{1}{2}x^2-22\frac{1}{2}x-13\frac{1}{2})}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$= \frac{-3x^3 + 9x^2 + 27x + 15}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$
$= \frac{-3x^3 + 9x^2 + 27x + 15}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2} = 0$
$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; 1[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]1; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x(-3 + \frac{3}{x})}{x^2(2 + \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2})} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{-1\frac{1}{2}(x-1)}{(x+1)^2} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{-1\frac{1}{2}(x-1)}{(x+1)^2} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{1\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = 0$
$1\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2} = 0 \qquad / + 4\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{2}x = 4\frac{1}{2} \qquad / : 1\frac{1}{2}$
$x = \frac{4\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}}$
$x = 3$
$\underline{x_4 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(3) = 0,0234 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(3/ -\frac{3}{16})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{1\frac{1}{2}x - 4\frac{1}{2}}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$
Zaehler $= 0$
$\underline{x_5 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_6 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-1; 3[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{-3x^3 + 9x^2 + 27x + 15}{x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1}$$

$Zaehler = 0$

$-3x^3 + 9x^2 + 27x + 15 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{llllll}
(-3x^3 & +9x^2 & +27x & +15 &) : (x+1) = -3x^2 + 12x + 15 \\
-(-3x^3 & -3x^2) & & & \\
\hline
 & 12x^2 & +27x & +15 & \\
 & -(12x^2 & +12x) & & \\
\hline
 & & 15x & +15 & \\
 & & -(15x & +15) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$-3x^2 + 12x + 15 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 15}}{2 \cdot (-3)}$$

$$x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{324}}{-6}$$

$$x_{1/2} = \frac{-12 \pm 18}{-6}$$

$$x_1 = \frac{-12 + 18}{-6} \qquad x_2 = \frac{-12 - 18}{-6}$$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = 5$

$x_7 = -1; \quad$ 2-fache Nullstelle

$x_8 = 5; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

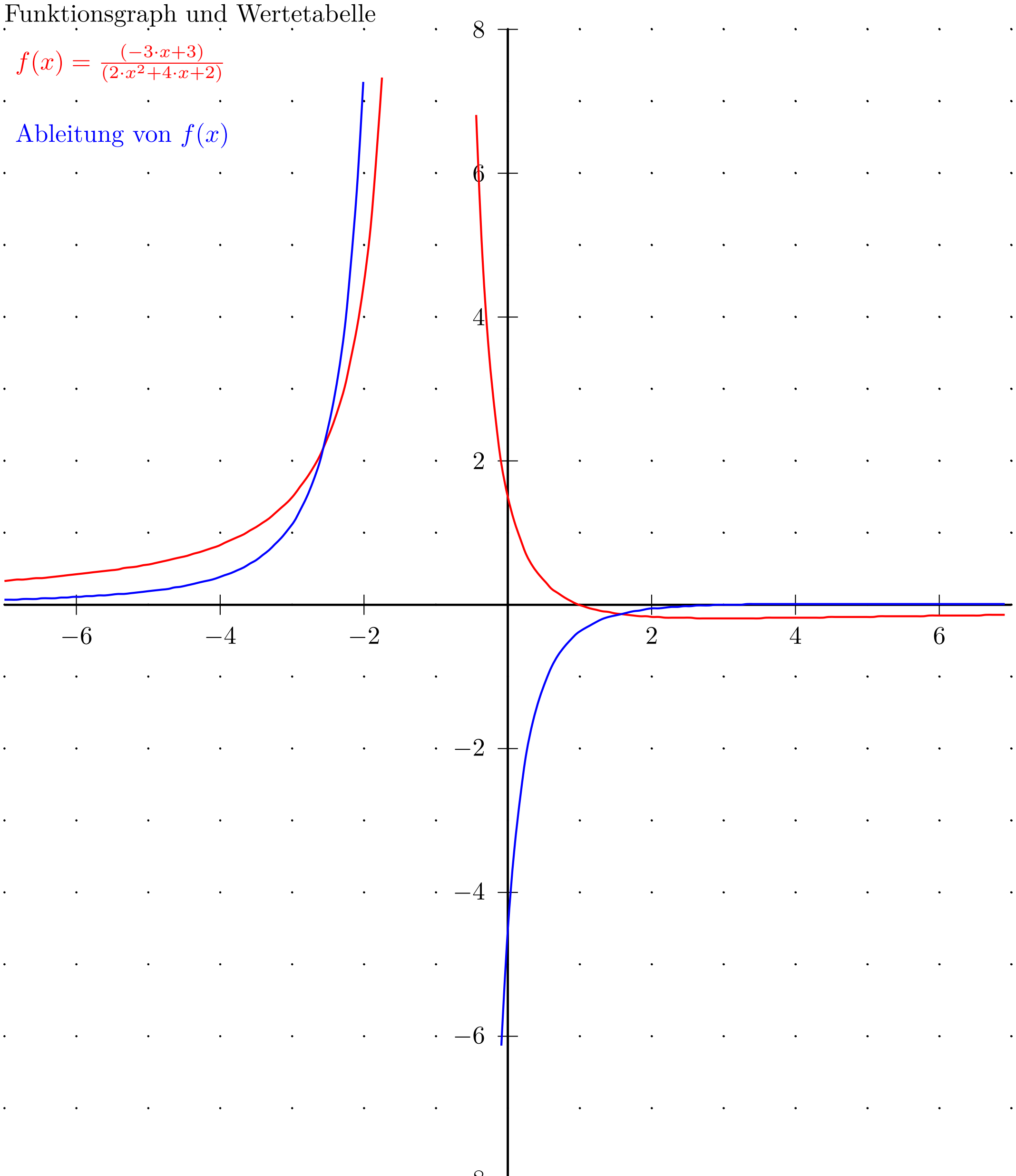
$x_9 = -1; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x <$	5	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; 5[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]5; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{36}$
$-6\frac{1}{2}$	$0,372$	$0,0857$	$0,0377$
-6	$\frac{21}{50}$	$0,108$	$0,0528$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{13}{27}$	$0,14$	$0,0768$
-5	$\frac{9}{16}$	$0,188$	$0,117$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{33}{49}$	$0,262$	$0,19$
-4	$\frac{5}{6}$	$0,389$	$0,333$
$-3\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{25}$	$0,624$	$0,653$
-3	$1\frac{1}{2}$	$1,13$	$1,5$
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	$2,45$	$4,45$
-2	$4\frac{1}{2}$	$7,5$	21
$-1\frac{1}{2}$	15	$54,1$	313
-1	$+unendlich$	$-4897\frac{47}{49}$	$-unendlich$
$-\frac{1}{2}$	9	$-42,1$	265
0	$1\frac{1}{2}$	$-4,5$	15

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$1\frac{1}{2}$	$-4,5$	15
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-1,11$	$2,67$
1	0	$-0,375$	$0,75$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{25}$	$-0,144$	$0,269$
2	$-\frac{1}{6}$	$-0,0556$	$0,111$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{49}$	$-0,0175$	$0,05$
3	$-\frac{3}{16}$	$-1,79 \cdot 10^{-6}$	$0,0234$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{27}$	$0,00823$	$0,011$
4	$-\frac{9}{50}$	$0,012$	$0,0048$
$4\frac{1}{2}$	$-0,174$	$0,0135$	$0,00164$
5	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{72}$	0
$5\frac{1}{2}$	$-0,16$	$0,0137$	$-0,00084$
6	$-\frac{15}{98}$	$0,0131$	$-0,00125$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{75}$	$0,0124$	$-0,00142$
7	$-\frac{9}{64}$	$0,0117$	$-0,00146$

Aufgabe (15)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{\frac{1}{2}x + 1}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}}$

Zaehler faktorisieren:

$\frac{1}{2}x + 1 = 0$

$\frac{1}{2}x + 1 = 0 \qquad / - 1$

$\frac{1}{2}x = -1 \qquad / : \frac{1}{2}$

$x = \frac{-1}{\frac{1}{2}}$

$x = -2$

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} = 0$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} = 0 \qquad / - \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{4} \qquad / : \frac{1}{2}$

$x^2 = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$

keine Lösung

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{\frac{1}{2}(x + 2)}{\frac{1}{2}(x^2 + \frac{1}{2})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + \frac{1}{2}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + \frac{1}{2}) - (x + 2) \cdot 2x}{(x^2 + \frac{1}{2})^2}$

$= \frac{(x^2 + \frac{1}{2}) - (2x^2 + 4x)}{(x^2 + \frac{1}{2})^2}$

$= \frac{-x^2 - 4x + \frac{1}{2}}{(x^2 + \frac{1}{2})^2}$

$= \frac{-x^2 - 4x + \frac{1}{2}}{(x^2 + \frac{1}{2})^2}$

$f''(x) = \frac{(-2x - 4) \cdot (x^4 + x^2 + \frac{1}{4}) - (-x^2 - 4x + \frac{1}{2}) \cdot (4x^3 + 2x)}{(x^4 + x^2 + \frac{1}{4})^2}$

$= \frac{(-2x^5 - 4x^4 - 2x^3 - 4x^2 - \frac{1}{2}x - 1) - (-4x^5 - 16x^4 - 8x^2 + x)}{(x^4 + x^2 + \frac{1}{4})^2}$

$= \frac{2x^5 + 12x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1\frac{1}{2}x - 1}{(x^4 + x^2 + \frac{1}{4})^2}$

$= \frac{2x^5 + 12x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1\frac{1}{2}x - 1}{(x^4 + x^2 + \frac{1}{4})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$x + 2 = 0$

$x_2 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-2;\infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-2[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(\frac{1}{2}+x)}{x^2(\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{4}}{x^2})} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \dfrac{-x^2-4x+\frac{1}{2}}{x^4+x^2+\frac{1}{4}} = 0$

$-x^2 - 4x + \dfrac{1}{2} = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot(-1)\cdot\frac{1}{2}}}{2\cdot(-1)}$

$x_{1/2} = \dfrac{+4 \pm \sqrt{18}}{-2}$

$x_{1/2} = \dfrac{4 \pm 4,24}{-2}$

$x_1 = \dfrac{4+4,24}{-2} \qquad x_2 = \dfrac{4-4,24}{-2}$

$x_1 = -4,12 \qquad x_2 = 0,121$

$x_3 = -4,12; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_4 = 0,121; \quad$ 1-fache Nullstelle

$f''(-4,12) = 0,0139 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(-4,12/-0,121)$

$f''(0,121) = -16$

$f''(0,121) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(0,121/4,12)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \dfrac{-x^2-4x+\frac{1}{2}}{x^4+x^2+\frac{1}{4}}$

Zaehler $= 0$

$x_5 = -4,12; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_6 = 0,121; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	$-4,12$	$< x <$	$0,121$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-4,12;0,121[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty;-4,12[\quad \cup \quad]0,121;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{2x^5 + 12x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1\frac{1}{2}x - 1}{x^8 + 2x^6 + 1\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}}$$

$Zaehler = 0$

$NumerischeSuche:$

$x_7 = -6,22;$ 1-fache Nullstelle

$x_8 = -0,308;$ 1-fache Nullstelle

$x_9 = 0,523;$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	$-6,22$	$< x <$	$-0,308$	$< x <$	$0,523$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-6,22; -0,308[\quad \cup \quad]0,523; \infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -6,22[\quad \cup \quad]-0,308; 0,523[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{10}{99}$	$-0,00837$	$-0,000651$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{19}$	$-0,00862$	$-0,000317$
-6	$-\frac{8}{73}$	$-0,00863$	$0,000329$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,114$	$-0,0082$	$0,00154$
-5	$-\frac{2}{17}$	$-0,00692$	$0,0038$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{10}{83}$	$-0,00406$	$0,00809$
-4	$-\frac{4}{33}$	$0,00184$	$0,0165$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{17}$	$0,0138$	$0,0337$
-3	$-\frac{2}{19}$	$0,0388$	$0,0712$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{27}$	$0,0933$	$0,16$
-2	0	$0,222$	$0,395$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$0,562$	$1,09$
-1	$\frac{2}{3}$	$1,56$	$3,26$
$-\frac{1}{2}$	2	4	$5,33$
0	4	2	-16

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	4	2	-16
$\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$-3,11$	$-0,596$
1	2	-2	$2,67$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{11}$	$-1,02$	$1,31$
2	$\frac{8}{9}$	$-0,568$	$0,615$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-0,346$	$0,315$
3	$\frac{10}{19}$	$-0,227$	$0,176$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{22}{51}$	$-0,158$	$0,106$
4	$\frac{4}{11}$	$-0,116$	$0,0681$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{26}{83}$	$-0,0877$	$0,0459$
5	$\frac{14}{51}$	$-0,0684$	$0,0321$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{10}{41}$	$-0,0547$	$0,0233$
6	$\frac{16}{73}$	$-0,0447$	$0,0174$
$6\frac{1}{2}$	$0,199$	$-0,0371$	$0,0132$
7	$\frac{2}{11}$	$-0,0312$	$0,0103$

Aufgabe (16)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{-x+3}{x^2-9}$
Zaehler faktorisieren:
$-x+3=0$

$-1x+3=0 \qquad /-3$
$-1x=-3 \qquad /:(-1)$
$x=\frac{-3}{-1}$
$x=3$
$\underline{x_1=3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x^2-9=0$

$1x^2-9=0 \qquad /+9$
$1x^2=9 \qquad /:1$
$x^2=\frac{9}{1}$
$x=\pm\sqrt{9}$
$x_1=3 \qquad x_2=-3$
$\underline{x_2=-3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3=3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{-(x-3)}{(x+3)(x-3)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$
• Term gekürzen
$f(x) = \frac{-1}{(x+3)}$
$f(x) = \frac{-1}{x+3}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \frac{0 \cdot (x+3) - (-1) \cdot 1}{(x+3)^2}$
$= \frac{0-(-1)}{(x+3)^2}$
$= \frac{1}{(x+3)^2}$
$= \frac{1}{(x+3)^2}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot (x^2+6x+9) - 1 \cdot (2x+6)}{(x^2+6x+9)^2}$
$= \frac{0-(2x+6)}{(x^2+6x+9)^2}$
$= \frac{-2x-6}{(x^2+6x+9)^2}$
$= \frac{-2x-6}{(x^2+6x+9)^2}$
$= \frac{-2(x+3)}{(x+3)^4}$
$= \frac{-2}{(x+3)^3}$

$= \frac{-2}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-1 = 0$
keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -3[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-3; \infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x(-1 + \frac{3}{x})}{x^2(1 - \frac{9}{x^2})} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{-1}{(x+3)} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{-1}{(x+3)} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -3$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 6x + 9} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 6x + 9}$
Zaehler $= 0$
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_4 = -3; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-3	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; -3[\quad \cup \quad]-3; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{-2}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

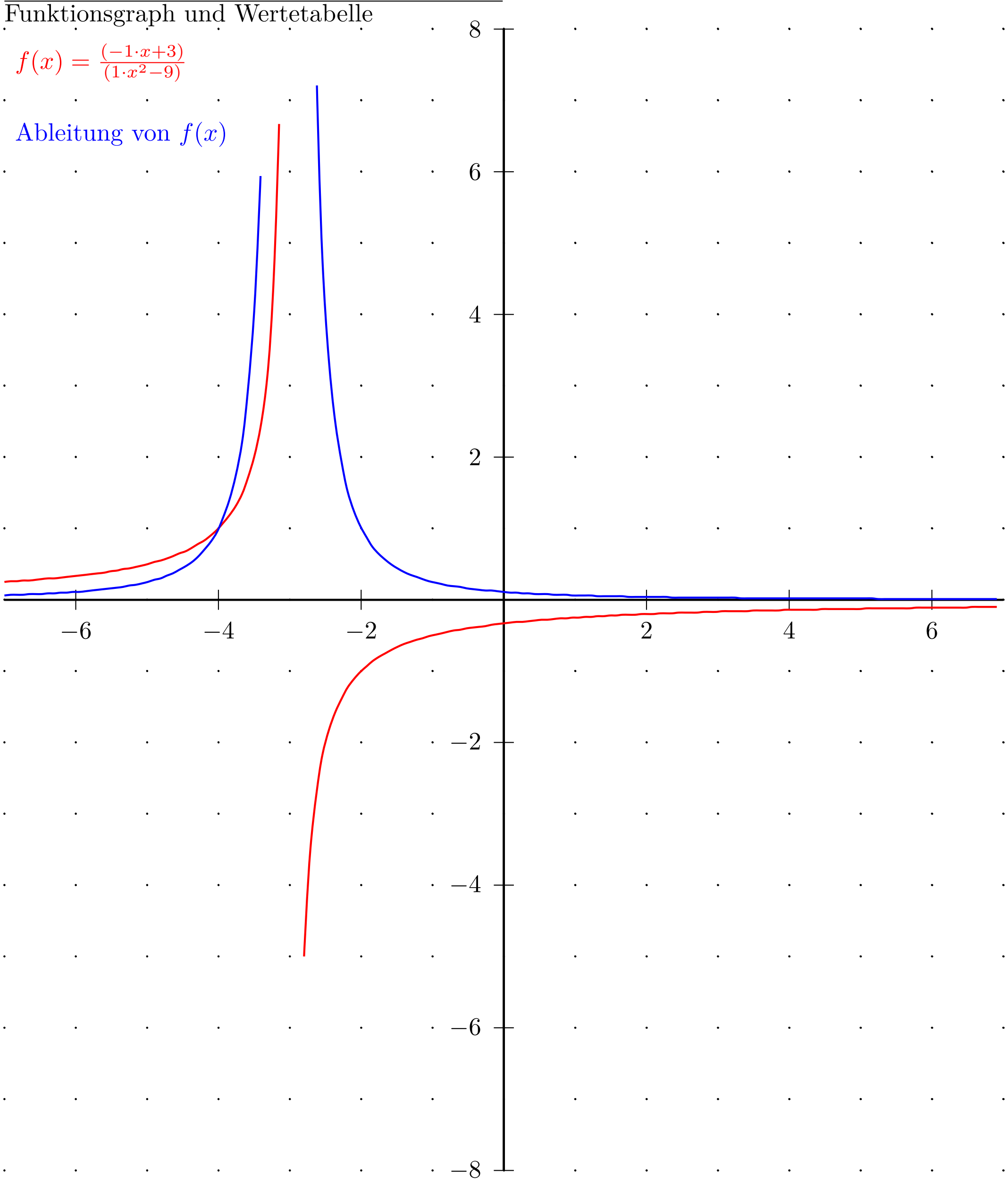
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_5 = -3; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-3	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -3[$ $\quad f''(x) > 0$ $\quad$ linksgekrümmt

$x \in]-3; \infty[$ $\quad f''(x) < 0$ $\quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{4}$	$0,0625$	$\frac{1}{32}$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$0,0816$	$0,0466$
-6	$\frac{1}{3}$	$0,111$	$0,0741$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$0,16$	$0,128$
-5	$\frac{1}{2}$	$0,25$	$0,25$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$0,445$	$0,593$
-4	1	1	2
$-3\frac{1}{2}$	2	4	16
-3	$+unendlich$	$-3265\frac{15}{49}$	$-unendlich$
$-2\frac{1}{2}$	-2	4	-16
-2	-1	1	-2
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$0,445$	$-0,593$
-1	$-\frac{1}{2}$	$0,25$	$-0,25$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$0,16$	$-0,128$
0	$-\frac{1}{3}$	$0,111$	$-0,0741$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\frac{1}{3}$	$0,111$	$-0,0741$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$0,0816$	$-0,0466$
1	$-\frac{1}{4}$	$0,0625$	$-\frac{1}{32}$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{4}{81}$	$-0,0219$
2	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$-0,016$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{11}$	$0,0331$	$-0,012$
3	NaN	$\frac{1}{36}$	NaN
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{13}$	$0,0237$	$-0,00728$
4	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{49}$	$-0,00583$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{15}$	$0,0178$	$-0,00474$
5	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$	$-0,00391$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{17}$	$0,0138$	$-0,00326$
6	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{81}$	$-0,00274$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{19}$	$0,0111$	$-0,00233$
7	$-\frac{1}{10}$	$0,01$	$-0,002$

Aufgabe (17)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$
Zaehler faktorisieren:
$2x+1=0$

$2x+1=0 \quad / -1$
$2x=-1 \quad / :2$
$x=\frac{-1}{2}$
$x=-\frac{1}{2}$
$\underline{x_1=-\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
Nenner faktorisieren:
$x^2=0$
$x^2=0 \Rightarrow x=0$
$\underline{x_2=0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{2(x+\frac{1}{2})}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x) = \frac{2x+1}{x^2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \frac{2\cdot x^2-(2x+1)\cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{2x^2-(4x^2+2x)}{(x^2)^2}$
$= \frac{-2x^2-2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-2x^2-2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-2(x+1)x}{x^4}$
$= \frac{-2(x+1)}{x^3}$
$= \frac{-2x-2}{x^3}$
$f''(x) = \frac{(-2)\cdot x^3-(-2x-2)\cdot 3x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{(-2x^3)-(-6x^3-6x^2)}{(x^3)^2}$
$= \frac{4x^3+6x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{4x^3+6x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{4(x+1\frac{1}{2})x^2}{x^6}$
$= \frac{4(x+1\frac{1}{2})}{x^4}$
$= \frac{4x+6}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$2x + 1 = 0$
$x_3 = -\frac{1}{2}$;   1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$x \in]-\frac{1}{2}; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x(2 + x)}{x^2(1)} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2(x + \frac{1}{2})}{x^2} = \infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{2(x + \frac{1}{2})}{x^2} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-2x - 2}{x^3} = 0$

$-2x - 2 = 0 \qquad / + 2$
$-2x = 2 \qquad / : (-2)$
$x = \frac{2}{-2}$
$x = -1$
$x_4 = -1$;   1-fache Nullstelle
$f''(-1) = 2 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(-1/-1)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-2x - 2}{x^3}$
Zaehler $= 0$
$x_5 = -1$;   1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_6 = 0$;   2-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-1; 0[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{4x + 6}{x^4}$

$Zaehler = 0$

$4x + 6 = 0 \qquad / - 6$
$4x = -6 \qquad / : 4$
$x = \frac{-6}{4}$
$x = -1\frac{1}{2}$
$\underline{x_7 = -1\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

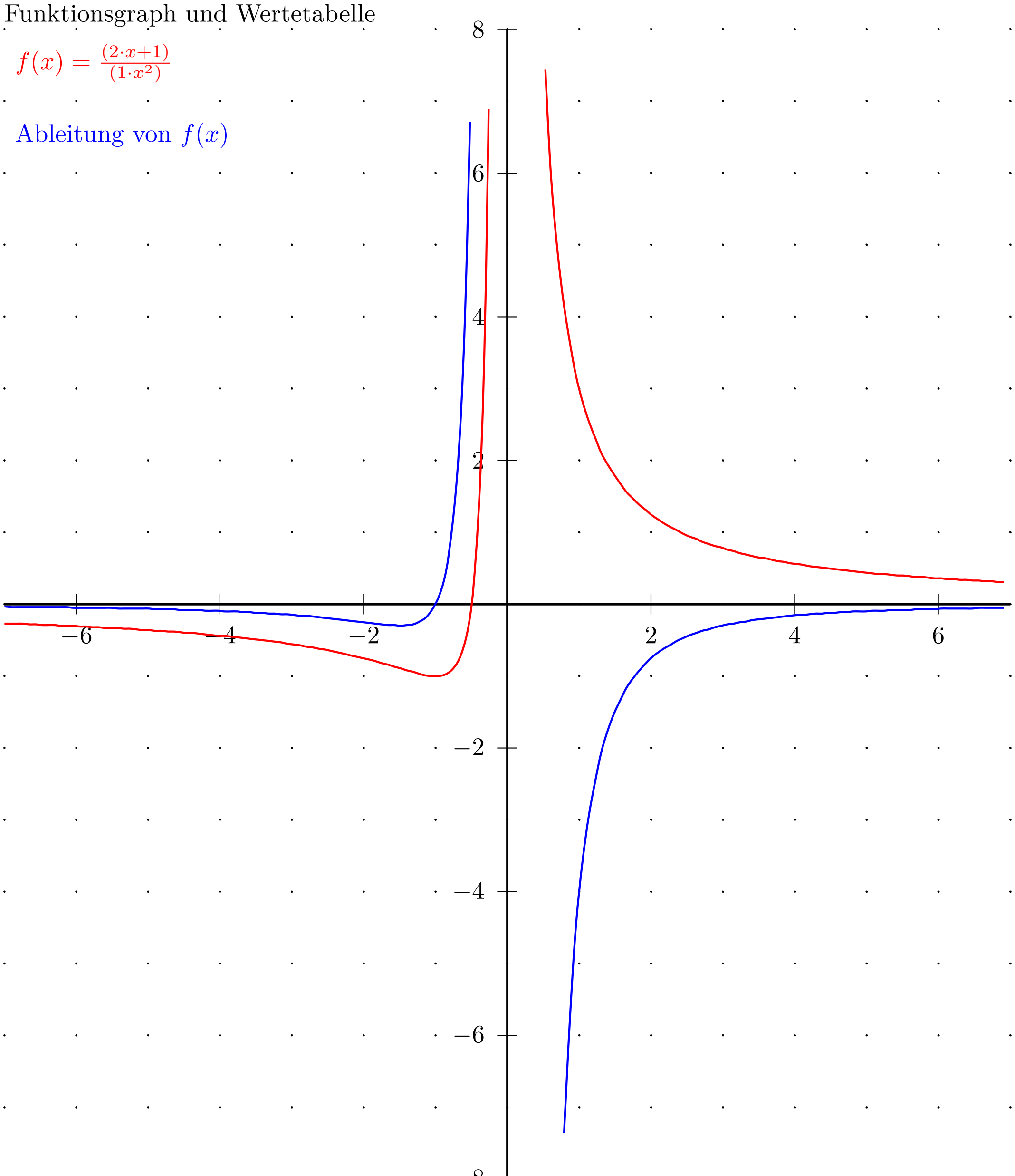
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_8 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-1\frac{1}{2}$	$< x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]-1\frac{1}{2}; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1\frac{1}{2}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{13}{49}$	$-0,035$	$-0,00916$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,284$	$-0,0401$	$-0,0112$
-6	$-\frac{11}{36}$	$-0,0463$	$-\frac{1}{72}$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,331$	$-0,0541$	$-0,0175$
-5	$-\frac{9}{25}$	$-0,064$	$-0,0224$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{32}{81}$	$-0,0768$	$-0,0293$
-4	$-\frac{7}{16}$	$-0,0938$	$-0,0391$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{24}{49}$	$-0,117$	$-0,0533$
-3	$-\frac{5}{9}$	$-0,148$	$-\frac{2}{27}$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{16}{25}$	$-0,192$	$-0,102$
-2	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-0,125$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{9}$	$-0,296$	$0,000108$
-1	-1	$0,000613$	2
$-\frac{1}{2}$	0	$8,03$	$64,2$
0	$+unendlich$	$6530\frac{30}{49}$	$-unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$+unendlich$	$6530\frac{30}{49}$	$-unendlich$
$\frac{1}{2}$	8	-24	128
1	3	-4	10
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{9}$	$-1,48$	$2,37$
2	$1\frac{1}{4}$	$-0,75$	$0,875$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{24}{25}$	$-0,448$	$0,41$
3	$\frac{7}{9}$	$-0,296$	$0,222$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{32}{49}$	$-0,21$	$0,133$
4	$\frac{9}{16}$	$-0,156$	$0,0859$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{40}{81}$	$-0,121$	$0,0585$
5	$\frac{11}{25}$	$-0,096$	$0,0416$
$5\frac{1}{2}$	$0,397$	$-0,0781$	$0,0306$
6	$\frac{13}{36}$	$-0,0648$	$0,0231$
$6\frac{1}{2}$	$0,331$	$-0,0546$	$0,0179$
7	$\frac{15}{49}$	$-0,0466$	$0,0142$

Aufgabe (18)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{3x-1}{x^2}$
Zaehler faktorisieren:
$3x - 1 = 0$

$3x - 1 = 0 \quad / + 1$
$3x = 1 \quad / : 3$
$x = \frac{1}{3}$
$x = \frac{1}{3}$
$\underline{x_1 = \frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x^2 = 0$
$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_2 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{3(x-\frac{1}{3})}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{3x-1}{x^2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \frac{3 \cdot x^2 - (3x-1) \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{3x^2 - (6x^2 - 2x)}{(x^2)^2}$
$= \frac{-3x^2 + 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-3x^2 + 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{-3x(x-\frac{2}{3})}{x^4}$
$= \frac{-3(x-\frac{2}{3})}{x^3}$
$= \frac{-3x+2}{x^3}$
$f''(x) = \frac{(-3) \cdot x^3 - (-3x+2) \cdot 3x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{(-3x^3) - (-9x^3 + 6x^2)}{(x^3)^2}$
$= \frac{6x^3 - 6x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{6x^3 - 6x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{6x^2(x-1)}{x^6}$
$= \frac{6(x-1)}{x^4}$
$= \frac{6x-6}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$3x - 1 = 0$
$x_3 = \frac{1}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	0	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]\frac{1}{3}; \infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \frac{1}{3}[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x(3 - \frac{1}{x})}{x^2(1)} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3(x - \frac{1}{3})}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{3(x - \frac{1}{3})}{x^2} = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{-3x + 2}{x^3} = 0$$

$-3x + 2 = 0 \qquad / - 2$
$-3x = -2 \qquad / : (-3)$
$x = \frac{-2}{-3}$
$x = \frac{2}{3}$
$x_4 = \frac{2}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle
$f''(\frac{2}{3}) = -10\frac{1}{8}$
$f''(\frac{2}{3}) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(\frac{2}{3}/2\frac{1}{4})$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$$f'(x) = \frac{-3x + 2}{x^3}$$

Zaehler $= 0$
$x_5 = \frac{2}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_6 = 0; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x <$	$\frac{2}{3}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]0; \frac{2}{3}[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]\frac{2}{3}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{6x-6}{x^4}$

$Zaehler = 0$

$6x - 6 = 0 \qquad / + 6$

$6x = 6 \qquad / : 6$

$x = \frac{6}{6}$

$x = 1$

$x_7 = 1; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_8 = 0; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; 1[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{22}{49}$	$-0,0671$	$-0,02$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,485$	$-0,0783$	$-0,0252$
-6	$-\frac{19}{36}$	$-\frac{5}{54}$	$-0,0324$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,579$	$-0,111$	$-0,0426$
-5	$-\frac{16}{25}$	$-0,136$	$-0,0576$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{58}{81}$	$-0,17$	$-0,0805$
-4	$-\frac{13}{16}$	$-0,219$	$-0,117$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{46}{49}$	$-0,292$	$-0,18$
-3	$-1\frac{1}{9}$	$-0,407$	$-0,296$
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{9}{25}$	$-0,608$	$-0,538$
-2	$-1\frac{3}{4}$	-1	$-1,13$
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{4}{9}$	$-1,93$	$-2,96$
-1	-4	-5	-12
$-\frac{1}{2}$	-10	$-28,1$	-144
0	$-unendlich$	$9795\frac{45}{49}$	$+unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-unendlich$	$9795\frac{45}{49}$	$+unendlich$
$\frac{1}{2}$	2	$4,02$	$-48,1$
1	2	-1	$-0,00123$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{5}{9}$	$-0,741$	$0,593$
2	$1\frac{1}{4}$	$-0,5$	$0,375$
$2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{25}$	$-0,352$	$0,23$
3	$\frac{8}{9}$	$-0,259$	$0,148$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{38}{49}$	$-0,198$	$0,1$
4	$\frac{11}{16}$	$-0,156$	$0,0703$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{50}{81}$	$-0,126$	$0,0512$
5	$\frac{14}{25}$	$-0,104$	$0,0384$
$5\frac{1}{2}$	$0,512$	$-0,0872$	$0,0295$
6	$\frac{17}{36}$	$-\frac{2}{27}$	$0,0231$
$6\frac{1}{2}$	$0,438$	$-0,0637$	$0,0185$
7	$\frac{20}{49}$	$-0,0554$	$0,015$

Aufgabe (19)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-4x + \frac{1}{2}}{x^2 + 4}$

Zaehler faktorisieren:

$-4x + \frac{1}{2} = 0$

$-4x + \frac{1}{2} = 0 \qquad / -\frac{1}{2}$

$-4x = -\frac{1}{2} \qquad / : (-4)$

$x = \frac{-\frac{1}{2}}{-4}$

$x = \frac{1}{8}$

$\underline{x_1 = \frac{1}{8}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 + 4 = 0$

$1x^2 + 4 = 0 \qquad / -4$

$1x^2 = -4 \qquad / : 1$

$x^2 = \frac{-4}{1}$

keine Lösung

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-4(x - \frac{1}{8})}{(x^2 + 4)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{-4x + \frac{1}{2}}{x^2 + 4}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{(-4) \cdot (x^2 + 4) - (-4x + \frac{1}{2}) \cdot 2x}{(x^2 + 4)^2}$

$= \frac{(-4x^2 - 16) - (-8x^2 + x)}{(x^2 + 4)^2}$

$= \frac{4x^2 - x - 16}{(x^2 + 4)^2}$

$= \frac{4x^2 - x - 16}{(x^2 + 4)^2}$

$f''(x) = \frac{(8x - 1) \cdot (x^4 + 8x^2 + 16) - (4x^2 - x - 16) \cdot (4x^3 + 16x)}{(x^4 + 8x^2 + 16)^2}$

$= \frac{(8x^5 - x^4 + 64x^3 - 8x^2 + 128x - 16) - (16x^5 - 4x^4 - 16x^2 - 256x)}{(x^4 + 8x^2 + 16)^2}$

$= \frac{-8x^5 + 3x^4 + 64x^3 + 8x^2 + 384x - 16}{(x^4 + 8x^2 + 16)^2}$

$= \frac{-8x^5 + 3x^4 + 64x^3 + 8x^2 + 384x - 16}{(x^4 + 8x^2 + 16)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-4x + \frac{1}{2} = 0$

$\underline{x_2 = \frac{1}{8}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$\frac{1}{8}$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; \frac{1}{8}[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]\frac{1}{8}; \infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(-4+\frac{\frac{1}{2}}{x})}{x^2(1+\frac{4}{x^2})} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{4x^2 - x - 16}{x^4 + 8x^2 + 16} = 0$$

$4x^2 - x - 16 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-16)}}{2 \cdot 4}$$

$$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{257}}{8}$$

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm 16}{8}$$

$$x_1 = \frac{1+16}{8} \qquad x_2 = \frac{1-16}{8}$$

$x_1 = 2,13 \qquad x_2 = -1,88$

$x_3 = -1,88; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_4 = 2,13; \quad$ 1-fache Nullstelle

$f''(-1,88) = -0,283$

$f''(-1,88) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(-1,88/1,06)$

$f''(2,13) = 0,22 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(2,13/-0,939)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$$f'(x) = \frac{4x^2 - x - 16}{x^4 + 8x^2 + 16}$$

Zaehler = 0

$x_5 = -1,88; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_6 = 2,13; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	$-1,88$	$< x <$	$2,13$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1,88[\quad \cup \quad]2,13; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-1,88; 2,13[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{-8x^5 + 3x^4 + 64x^3 + 8x^2 + 384x - 16}{x^8 + 16x^6 + 96x^4 + 256x^2 + 256}$$

$Zaehler = 0$

$NumerischeSuche:$
$x_7 = -3,3;$ 1-fache Nullstelle
$x_8 = 0,0416;$ 1-fache Nullstelle
$x_9 = 3,64;$ 1-fache Nullstelle

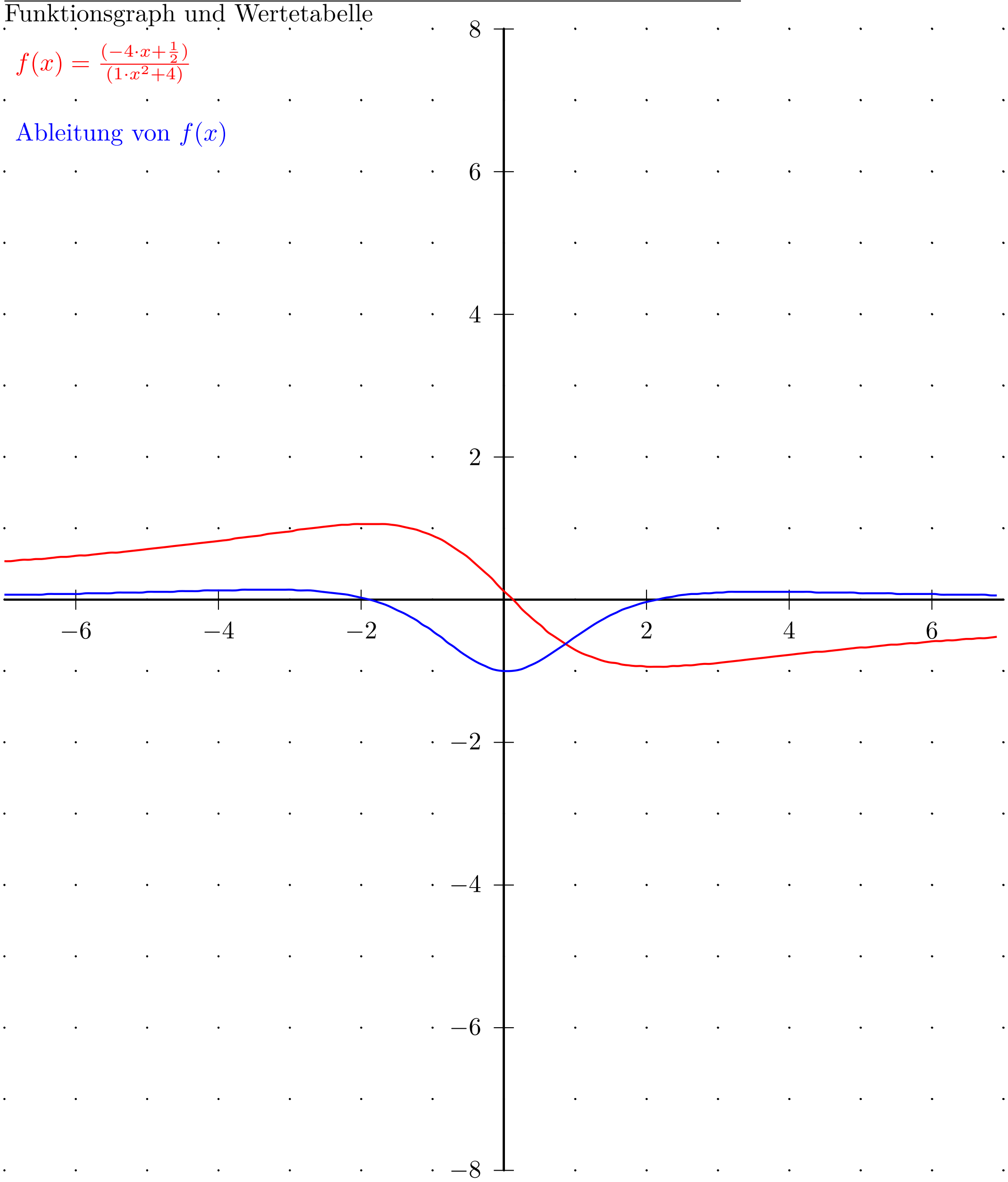
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	$-3,3$	$< x <$	$0,0416$	$< x <$	$3,64$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -3,3[\quad \cup \quad]0,0416; 3,64[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-3,3; 0,0416[\quad \cup \quad]3,64; \infty[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$0,538$	$0,0666$	$0,0149$
$-6\frac{1}{2}$	$0,573$	$0,0746$	$0,0171$
-6	$\frac{49}{80}$	$0,0838$	$0,0196$
$-5\frac{1}{2}$	$0,657$	$0,0942$	$0,0221$
-5	$\frac{41}{58}$	$0,106$	$0,0242$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{74}{97}$	$0,118$	$0,0248$
-4	$\frac{33}{40}$	$0,13$	$0,0215$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{58}{65}$	$0,138$	$0,00926$
-3	$\frac{25}{26}$	$0,136$	$-0,0223$
$-2\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{41}$	$0,109$	$-0,0931$
-2	$1\frac{1}{16}$	$0,0312$	$-0,234$
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{25}$	$-0,141$	$-0,468$
-1	$\frac{9}{10}$	$-0,44$	$-0,712$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{10}{17}$	$-0,803$	$-0,655$
0	$\frac{1}{8}$	-1	$-0,0625$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{8}$	-1	$-0,0625$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{6}{17}$	$-0,858$	$0,57$
1	$-\frac{7}{10}$	$-0,52$	$0,696$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{22}{25}$	$-0,218$	$0,49$
2	$-\frac{15}{16}$	$-0,0313$	$0,266$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{38}{41}$	$0,0619$	$0,12$
3	$-\frac{23}{26}$	$0,101$	$0,0432$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{54}{65}$	$0,112$	$0,006$
4	$-\frac{31}{40}$	$0,11$	$-0,0105$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{70}{97}$	$0,103$	$-0,0168$
5	$-\frac{39}{58}$	$0,0939$	$-0,0184$
$5\frac{1}{2}$	$-0,628$	$0,0848$	$-0,0178$
6	$-\frac{47}{80}$	$0,0763$	$-0,0164$
$6\frac{1}{2}$	$-0,551$	$0,0685$	$-0,0147$
7	$-0,519$	$0,0616$	$-0,013$

Aufgabe (20)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{2x - \frac{1}{4}}{x^2 - 4}$

Zaehler faktorisieren:

$2x - \dfrac{1}{4} = 0$

$2x - \dfrac{1}{4} = 0 \qquad / + \dfrac{1}{4}$

$2x = \dfrac{1}{4} \qquad / : 2$

$x = \dfrac{\frac{1}{4}}{2}$

$x = \dfrac{1}{8}$

$\underline{x_1 = \dfrac{1}{8}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 - 4 = 0$

$1x^2 - 4 = 0 \qquad / + 4$

$1x^2 = 4 \qquad / : 1$

$x^2 = \dfrac{4}{1}$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_2 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{2(x - \frac{1}{8})}{(x+2)(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

$f(x) = \dfrac{2x - \frac{1}{4}}{x^2 - 4}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{2 \cdot (x^2 - 4) - (2x - \frac{1}{4}) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2}$

$= \dfrac{(2x^2 - 8) - (4x^2 - \frac{1}{2}x)}{(x^2 - 4)^2}$

$= \dfrac{-2x^2 + \frac{1}{2}x - 8}{(x^2 - 4)^2}$

$= \dfrac{-2x^2 + \frac{1}{2}x - 8}{(x^2 - 4)^2}$

$f''(x) = \dfrac{(-4x + \frac{1}{2}) \cdot (x^4 - 8x^2 + 16) - (-2x^2 + \frac{1}{2}x - 8) \cdot (4x^3 - 16x)}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$

$= \dfrac{(-4x^5 + \frac{1}{2}x^4 + 32x^3 - 4x^2 - 64x + 8) - (-8x^5 + 2x^4 - 8x^2 + 128x)}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$

$= \dfrac{4x^5 - 1\frac{1}{2}x^4 + 32x^3 + 4x^2 - 192x + 8}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$

$= \dfrac{4x^5 - 1\frac{1}{2}x^4 + 32x^3 + 4x^2 - 192x + 8}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$2x - \frac{1}{4} = 0$
$\underline{x_4 = \frac{1}{8}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	$\frac{1}{8}$	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-2; \frac{1}{8}[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]\frac{1}{8}; 2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x(2 - \frac{\frac{1}{4}}{x})}{x^2(1 - \frac{4}{x^2})} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{2(x - \frac{1}{8})}{(x+2)(x-2)} = \infty$
$\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{2(x - \frac{1}{8})}{(x+2)(x-2)} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$
$\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{2(x - \frac{1}{8})}{(x+2)(x-2)} = \infty$
$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{2(x - \frac{1}{8})}{(x+2)(x-2)} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-2x^2 + \frac{1}{2}x - 8}{x^4 - 8x^2 + 16} = 0$
$-2x^2 + \frac{1}{2}x - 8 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-2)}$
$x_{1/2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{-63\frac{3}{4}}}{-4}$
Diskriminante negativ keine Lösung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-2x^2 + \frac{1}{2}x - 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$
Zaehler $= 0$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_5 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-2	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; 2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{4x^5 - 1\frac{1}{2}x^4 + 32x^3 + 4x^2 - 192x + 8}{x^8 - 16x^6 + 96x^4 - 256x^2 + 256}$

$Zaehler = 0$

$NumerischeSuche:$

$x_7 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_8 = 0,0417; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_9 = 2; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_10 = -2; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_11 = 2; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x <$	$0,0417$	$< x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-2; 0,0417[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]0,0417; 2[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{19}{60}$	$-0,0541$	$-0,0196$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,346$	$-0,0654$	$-0,0264$
-6	$-0,383$	$-0,0811$	$-0,0369$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{7}$	$-0,103$	$-0,054$
-5	$-\frac{41}{84}$	$-0,137$	$-0,0842$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{37}{65}$	$-0,192$	$-0,143$
-4	$-\frac{11}{16}$	$-0,292$	$-0,274$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{29}{33}$	$-0,503$	$-0,641$
-3	$-1\frac{1}{4}$	$-1,1$	$-2,14$
$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{3}$	$-4,3$	-17
-2	$-unendlich$	$3,47 \cdot 10^3$	$+unendlich$
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{6}{7}$	$-4,33$	17
-1	$\frac{3}{4}$	$-1,17$	$2,06$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-0,622$	$0,51$
0	$\frac{1}{16}$	$-0,5$	$0,0313$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{16}$	$-0,5$	$0,0313$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-0,587$	$-0,42$
1	$-\frac{7}{12}$	$-1,06$	$-1,8$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{4}{7}$	$-3,84$	-15
2	$+unendlich$	$3,06 \cdot 10^3$	$-unendlich$
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{9}$	$-3,81$	15
3	$1\frac{3}{20}$	$-0,98$	$1,89$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{9}{11}$	$-0,452$	$0,568$
4	$\frac{31}{48}$	$-0,264$	$0,244$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{7}{13}$	$-0,175$	$0,128$
5	$\frac{13}{28}$	$-0,126$	$0,0756$
$5\frac{1}{2}$	$0,41$	$-0,0954$	$0,0488$
6	$0,367$	$-0,0752$	$0,0334$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-0,061$	$0,024$
7	$\frac{11}{36}$	$-0,0506$	$0,0179$

Aufgabe (21)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{\frac{1}{5}x}{x^2 + 2x + 1}$

Zaehler faktorisieren:

$\frac{1}{5}x = 0$

$x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$1x^2 + 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \frac{-2 + 0}{2} \qquad x_2 = \frac{-2 - 0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_2 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{\frac{1}{5}x}{(x+1)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) = \frac{\frac{1}{5}x}{x^2 + 2x + 1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{\frac{1}{5} \cdot (x^2 + 2x + 1) - \frac{1}{5}x \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \frac{(\frac{1}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}) - (\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}x)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \frac{-\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \frac{-\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \frac{-\frac{1}{5}(x+1)(x-1)}{(x+1)^4}$

$= \frac{-\frac{1}{5}(x-1)}{(x+1)^3}$

$= \frac{-\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

$f''(x) = \frac{(-\frac{1}{5}) \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (-\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}) \cdot (3x^2 + 6x + 3)}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

$= \frac{(-\frac{1}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}) - (-\frac{3}{5}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{3}{5}x + \frac{3}{5})}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

$= \frac{\frac{2}{5}x^3 - 1\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

$= \frac{\frac{2}{5}x^3 - 1\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$\frac{1}{5}x = 0$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; 0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x(\frac{1}{5})}{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{\frac{1}{5}x}{(x+1)^2} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{\frac{1}{5}x}{(x+1)^2} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = 0$
$-\frac{1}{5}x + \frac{1}{5} = 0 \qquad / -\frac{1}{5}$
$-\frac{1}{5}x = -\frac{1}{5} \qquad / : \left(-\frac{1}{5}\right)$
$x = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{1}{5}}$
$x = 1$
$\underline{x_4 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(1) = -\frac{1}{40}$
$f''(1) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1/\frac{1}{20})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$
Zaehler $= 0$
$\underline{x_5 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_6 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-1;1[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]1;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{\frac{2}{5}x^3 - 1\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}}{x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1}$$

$Zaehler = 0$

$$\frac{2}{5}x^3 - 1\frac{1}{5}x - \frac{4}{5} = 0$$

$NumerischeSuche:$

$x_7 = -1; \quad$ 2-fache Nullstelle

$x_8 = 2; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

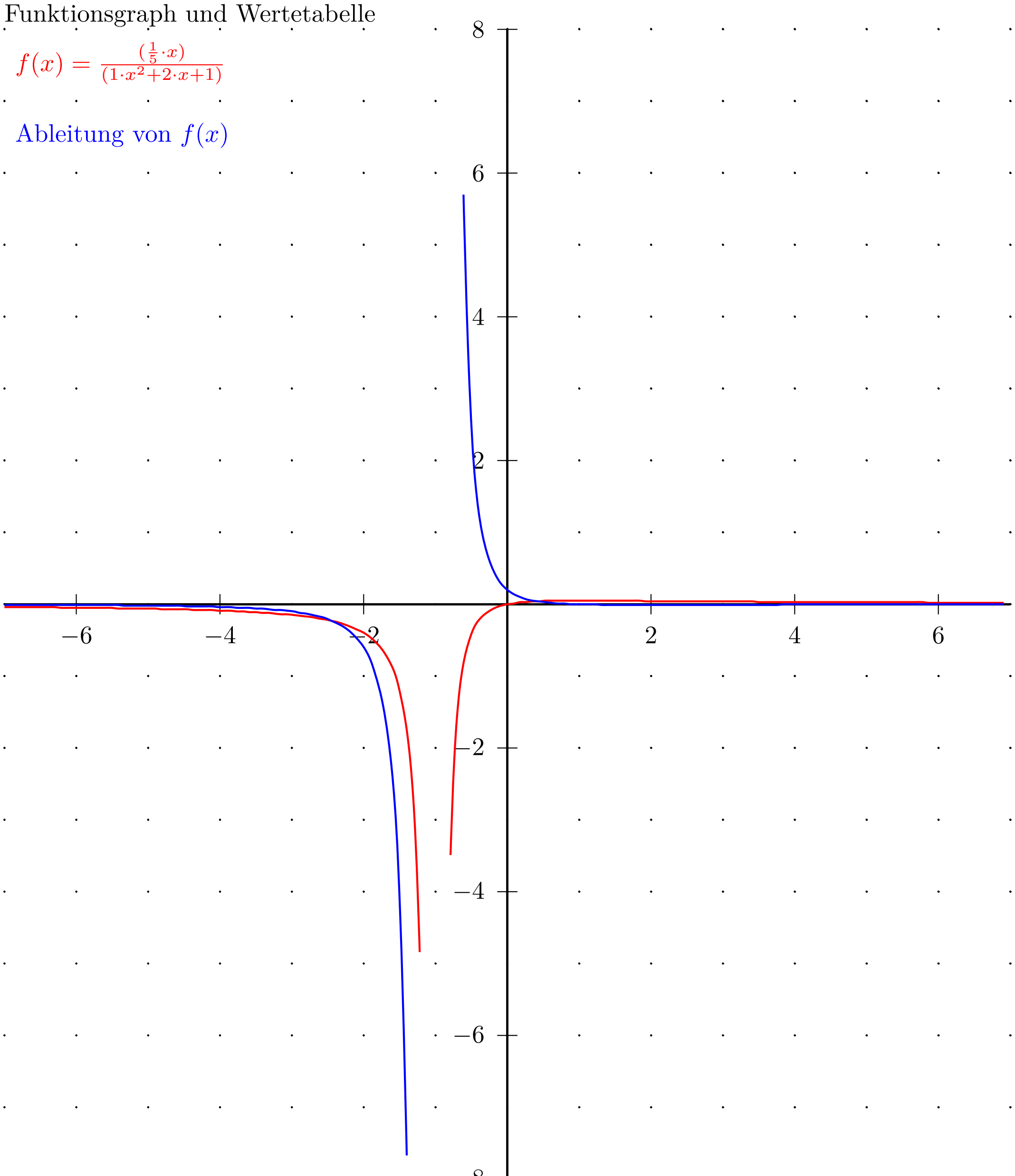
$x_9 = -1; \quad$ 2-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]2;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;-1[\quad \cup \quad]-1;2[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-0,0389$	$-0,00741$	$-0,00278$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,043$	$-0,00902$	$-0,00372$
-6	$-0,048$	$-0,0112$	$-0,00512$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,0543$	$-0,0143$	$-0,00732$
-5	$-\frac{1}{16}$	$-0,0188$	$-0,0109$
$-4\frac{1}{2}$	$-0,0735$	$-0,0257$	$-0,0173$
-4	$-\frac{4}{45}$	$-0,037$	$-0,0296$
$-3\frac{1}{2}$	$-0,112$	$-0,0576$	$-0,0563$
-3	$-\frac{3}{20}$	$-0,1$	$-0,125$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$-0,207$	$-0,356$
-2	$-\frac{2}{5}$	$-0,6$	$-1,6$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{5}$	$-4,01$	$-22,4$
-1	$-unendlich$	$653\frac{3}{49}$	$+unendlich$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$2,41$	-16
0	0	$0,2$	$-0,8$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$0,2$	$-0,8$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{45}$	$0,0296$	$-0,119$
1	$\frac{1}{20}$	$3,83 \cdot 10^{-6}$	$-0,025$
$1\frac{1}{2}$	$0,048$	$-0,0064$	$-0,00512$
2	$\frac{2}{45}$	$-0,00741$	$-3,36 \cdot 10^{-7}$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{49}$	$-0,007$	$0,00133$
3	$\frac{3}{80}$	$-0,00625$	$0,00156$
$3\frac{1}{2}$	$0,0346$	$-0,00549$	$0,00146$
4	$0,032$	$-0,0048$	$0,00128$
$4\frac{1}{2}$	$0,0298$	$-0,00421$	$0,00109$
5	$\frac{1}{36}$	$-0,0037$	$0,000926$
$5\frac{1}{2}$	$0,026$	$-0,00328$	$0,000784$
6	$0,0245$	$-0,00292$	$0,000666$
$6\frac{1}{2}$	$0,0231$	$-0,00261$	$0,000569$
7	$0,0219$	$-0,00234$	$0,000488$

Aufgabe (22)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{-1\frac{1}{2}x+2}{x^2-6x+9}$

Zaehler faktorisieren:

$-1\dfrac{1}{2}x+2=0$

$-1\dfrac{1}{2}x+2=0 \qquad /-2$

$-1\dfrac{1}{2}x=-2 \qquad /:\left(-1\dfrac{1}{2}\right)$

$x=\dfrac{-2}{-1\frac{1}{2}}$

$x=1\dfrac{1}{3}$

$\underline{x_1=1\dfrac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2-6x+9=0$

$1x^2-6x+9=0$

$x_{1/2}=\dfrac{+6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot9}}{2\cdot1}$

$x_{1/2}=\dfrac{+6\pm\sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2}=\dfrac{6\pm0}{2}$

$x_1=\dfrac{6+0}{2} \qquad x_2=\dfrac{6-0}{2}$

$x_1=3 \qquad x_2=3$

$\underline{x_2=3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x)=\dfrac{-1\frac{1}{2}(x-1\frac{1}{3})}{(x-3)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

$f(x) = \dfrac{-1\frac{1}{2}x+2}{x^2-6x+9}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x)=\dfrac{(-1\frac{1}{2})\cdot(x^2-6x+9)-(-1\frac{1}{2}x+2)\cdot(2x-6)}{(x^2-6x+9)^2}$

$=\dfrac{(-1\frac{1}{2}x^2+9x-13\frac{1}{2})-(-3x^2+13x-12)}{(x^2-6x+9)^2}$

$=\dfrac{1\frac{1}{2}x^2-4x-1\frac{1}{2}}{(x^2-6x+9)^2}$

$=\dfrac{1\frac{1}{2}x^2-4x-1\frac{1}{2}}{(x^2-6x+9)^2}$

$=\dfrac{1\frac{1}{2}(x+\frac{1}{3})(x-3)}{(x-3)^4}$

$=\dfrac{1\frac{1}{2}(x+\frac{1}{3})}{(x-3)^3}$

$=\dfrac{1\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^3-9x^2+27x-27}$

$$f''(x) = \frac{1\frac{1}{2} \cdot (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) - (1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) \cdot (3x^2 - 18x + 27)}{(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)^2}$$
$$= \frac{(1\frac{1}{2}x^3 - 13\frac{1}{2}x^2 + 40\frac{1}{2}x - 40\frac{1}{2}) - (4\frac{1}{2}x^3 - 25\frac{1}{2}x^2 + 31\frac{1}{2}x + 13\frac{1}{2})}{(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)^2}$$
$$= \frac{-3x^3 + 12x^2 + 9x - 54}{(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)^2}$$
$$= \frac{-3x^3 + 12x^2 + 9x - 54}{(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)^2}$$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-1\frac{1}{2}x + 2 = 0$

$x_3 = 1\frac{1}{3}$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$1\frac{1}{3}$	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; 1\frac{1}{3}[$ $f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]1\frac{1}{3}; 3[\quad \cup \quad]3; \infty[$ $f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(-1\frac{1}{2} + \frac{2}{x})}{x^2(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2})} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{-1\frac{1}{2}(x - 1\frac{1}{3})}{(x-3)^2} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{-1\frac{1}{2}(x - 1\frac{1}{3})}{(x-3)^2} = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 3$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27} = 0$$

$1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \qquad / -\frac{1}{2}$

$1\frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} \qquad / : 1\frac{1}{2}$

$x = \frac{-\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}}$

$x = -\frac{1}{3}$

$x_4 = -\frac{1}{3}$; 1-fache Nullstelle

$f''(-\frac{1}{3}) = -0,0405$

$f''(-\frac{1}{3}) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(-\frac{1}{3}/\frac{9}{40})$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \dfrac{1\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}$
Zaehler $= 0$
$x_5 = -\dfrac{1}{3}$; 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_6 = 3$; 2-fache Nullstelle

	$x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x <$	3	$< x$
$f'(x)$	+	0	−	0	+

$x \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\frac{1}{3}; 3[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung
$f''(x) = \dfrac{-3x^3 + 12x^2 + 9x - 54}{x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1,22 \cdot 10^3 x^2 - 1,46 \cdot 10^3 x + 729}$
$Zaehler = 0$

$-3x^3 + 12x^2 + 9x - 54 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -2

$$
\begin{array}{llll}
(-3x^3 & +12x^2 & +9x & -54 \quad) : (x+2) = -3x^2 + 18x - 27 \\
-(-3x^3 & -6x^2) & & \\
\hline
 & 18x^2 & +9x & -54 \\
 & -(18x^2 & +36x) & \\
\hline
 & & -27x & -54 \\
 & & -(-27x & -54) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

$-3x^2 + 18x - 27 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-27)}}{2 \cdot (-3)}$
$x_{1/2} = \dfrac{-18 \pm \sqrt{0}}{-6}$
$x_{1/2} = \dfrac{-18 \pm 0}{-6}$
$x_1 = \dfrac{-18 + 0}{-6} \qquad x_2 = \dfrac{-18 - 0}{-6}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$
$x_7 = -2$; 1-fache Nullstelle
$x_8 = 3$; 2-fache Nullstelle

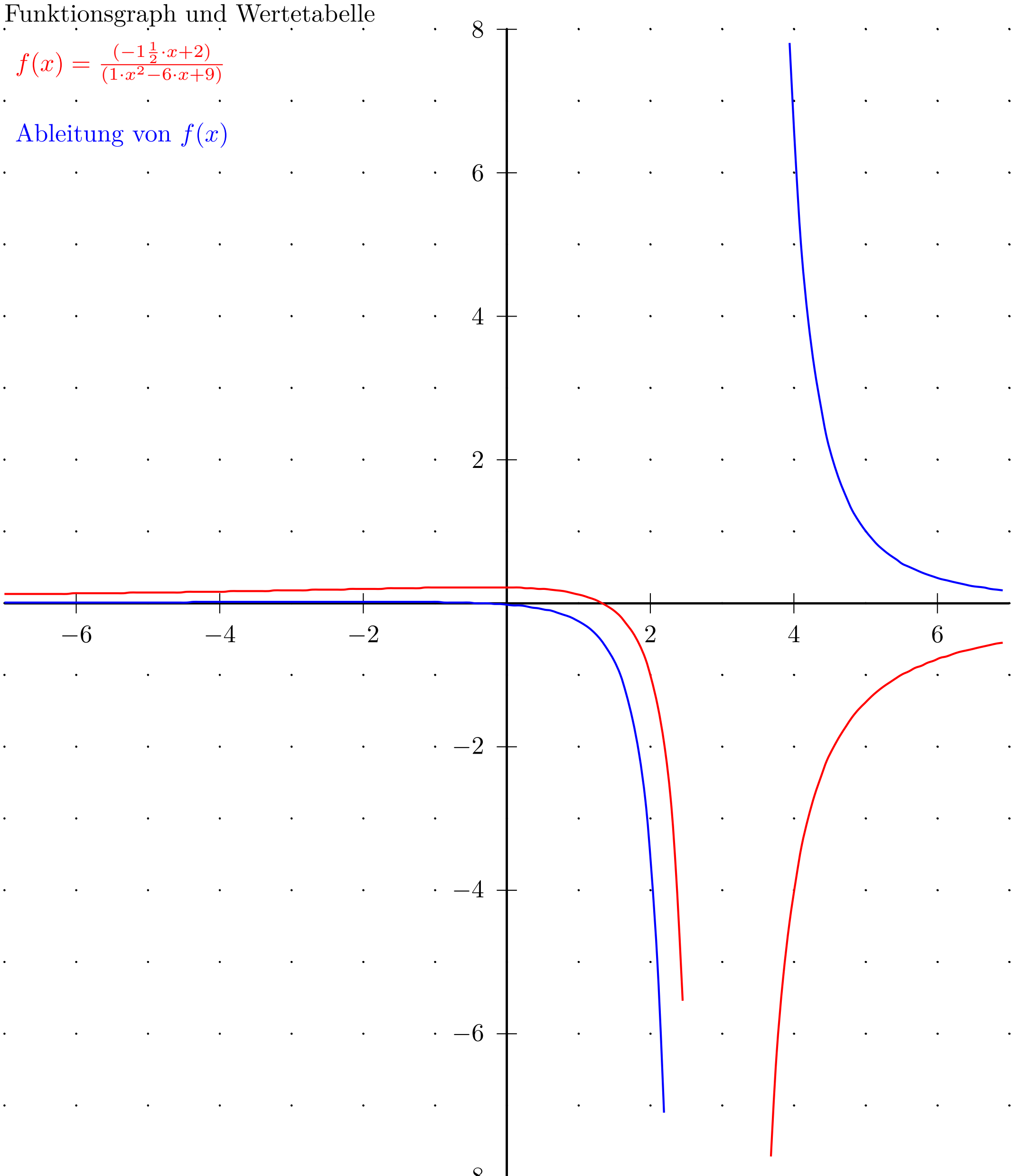
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_9 = 3$; 2-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x <$	3	$< x$
$f''(x)$	+	0	−	0	−

$x \in]-\infty; -2[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-2; 3[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{8}$	$0,01$	$0,0015$
$-6\frac{1}{2}$	$0,13$	$0,0108$	$0,00166$
-6	$\frac{11}{81}$	$0,0117$	$0,00183$
$-5\frac{1}{2}$	$0,142$	$0,0126$	$0,00201$
-5	$0,148$	$0,0137$	$0,0022$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{7}{45}$	$0,0148$	$0,00237$
-4	$\frac{8}{49}$	$0,016$	$0,0025$
$-3\frac{1}{2}$	$0,172$	$0,0173$	$0,00252$
-3	$\frac{13}{72}$	$\frac{1}{54}$	$0,00231$
$-2\frac{1}{2}$	$0,19$	$0,0195$	$0,00164$
-2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{50}$	$-1,96\cdot 10^{-7}$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{17}{81}$	$0,0192$	$-0,00366$
-1	$\frac{7}{32}$	$0,0156$	$-0,0117$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{11}{49}$	$0,00583$	$-0,03$
0	$\frac{2}{9}$	$-0,0185$	$-0,0741$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{2}{9}$	$-0,0185$	$-0,0741$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$-0,08$	$-0,192$
1	$\frac{1}{8}$	$-0,25$	$-0,563$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{9}$	$-0,815$	$-2,07$
2	-1	$-3,5$	-12
$2\frac{1}{2}$	-7	$-34,1$	-216
3	$-unendlich$	$-4897\frac{47}{49}$	$+unendlich$
$3\frac{1}{2}$	-13	$46,1$	-265
4	-4	$6,5$	-18
$4\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{9}$	$2,15$	$-3,85$
5	$-1\frac{3}{8}$	1	$-1,31$
$5\frac{1}{2}$	-1	$0,56$	$-0,576$
6	$-\frac{7}{9}$	$0,352$	$-0,296$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{31}{49}$	$0,239$	$-0,17$
7	$-\frac{17}{32}$	$0,172$	$-0,105$

Aufgabe (23)

•Funktion/Faktorisieren

$f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^3+3x^2+3x+1}$

Nenner faktorisieren:

$x^3+3x^2+3x+1=0$

$x^3+3x^2+3x+1=0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{llllll}
(x^3 & +3x^2 & +3x & +1 &) : (x+1) = x^2+2x+1 \\
-(x^3 & +x^2) & & & \\
\hline
 & 2x^2 & +3x & +1 & \\
 & -(2x^2 & +2x) & & \\
\hline
 & & x & +1 & \\
 & & -(x & +1) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$1x^2+2x+1=0$

$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$

$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2}=\dfrac{-2\pm0}{2}$

$x_1=\dfrac{-2+0}{2} \qquad x_2=\dfrac{-2-0}{2}$

$x_1=-1 \qquad x_2=-1$

$\underline{x_1=-1; \quad \text{3-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f\left(x\right)=\dfrac{1}{(x+1)^3}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^3+3x^2+3x+1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'\left(x\right)=\dfrac{0\cdot(x^3+3x^2+3x+1)-1\cdot(3x^2+6x+3)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$=\dfrac{0-(3x^2+6x+3)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$=\dfrac{-3x^2-6x-3}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$=\dfrac{-3x^2-6x-3}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$f''\left(x\right)=\dfrac{(-6x-6)\cdot(x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1)-(-3x^2-6x-3)\cdot(6x^5+30x^4+60x^3+60x^2+30x+6)}{(x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1)^2}$

$=\dfrac{(-6x^7-42x^6-126x^5-210x^4-210x^3-126x^2-42x-6)-(-18x^7-126x^6-378x^5-630x^4-630x^3-378x^2-126x-18}{(x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1)^2}$

$=\dfrac{12x^7+84x^6+252x^5+420x^4+420x^3+252x^2+84x+12}{(x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1)^2}$

$=\dfrac{12x^7+84x^6+252x^5+420x^4+420x^3+252x^2+84x+12}{(x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler=0$

$1=0$

keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-1;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-1[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^3(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})} = 0$$

Horizontale Asymptote: $y = 0$

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{1}{(x+1)^3} = \infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} \frac{1}{(x+1)^3} = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{-3x^2-6x-3}{x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1} = 0$$

$$-3x^2-6x-3 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{+6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot(-3)\cdot(-3)}}{2\cdot(-3)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+6\pm\sqrt{0}}{-6}$$

$$x_{1/2} = \frac{6\pm 0}{-6}$$

$$x_1 = \frac{6+0}{-6} \qquad x_2 = \frac{6-0}{-6}$$

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$$

$x_2 = -1$; 2-fache Nullstelle

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$$f'(x) = \frac{-3x^2-6x-3}{x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1}$$

Zaehler $= 0$

$x_3 = -1$; 2-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_4 = -1$; 3-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;\infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{12x^7+84x^6+252x^5+420x^4+420x^3+252x^2+84x+12}{x^12+12x^11+66x^10+220x^9+495x^8+792x^7+924x^6+792x^5+495x^4+220x^3+66x^2+12x+1}$$

$Zaehler = 0$

$Numerische Suche:$
keine Loesung

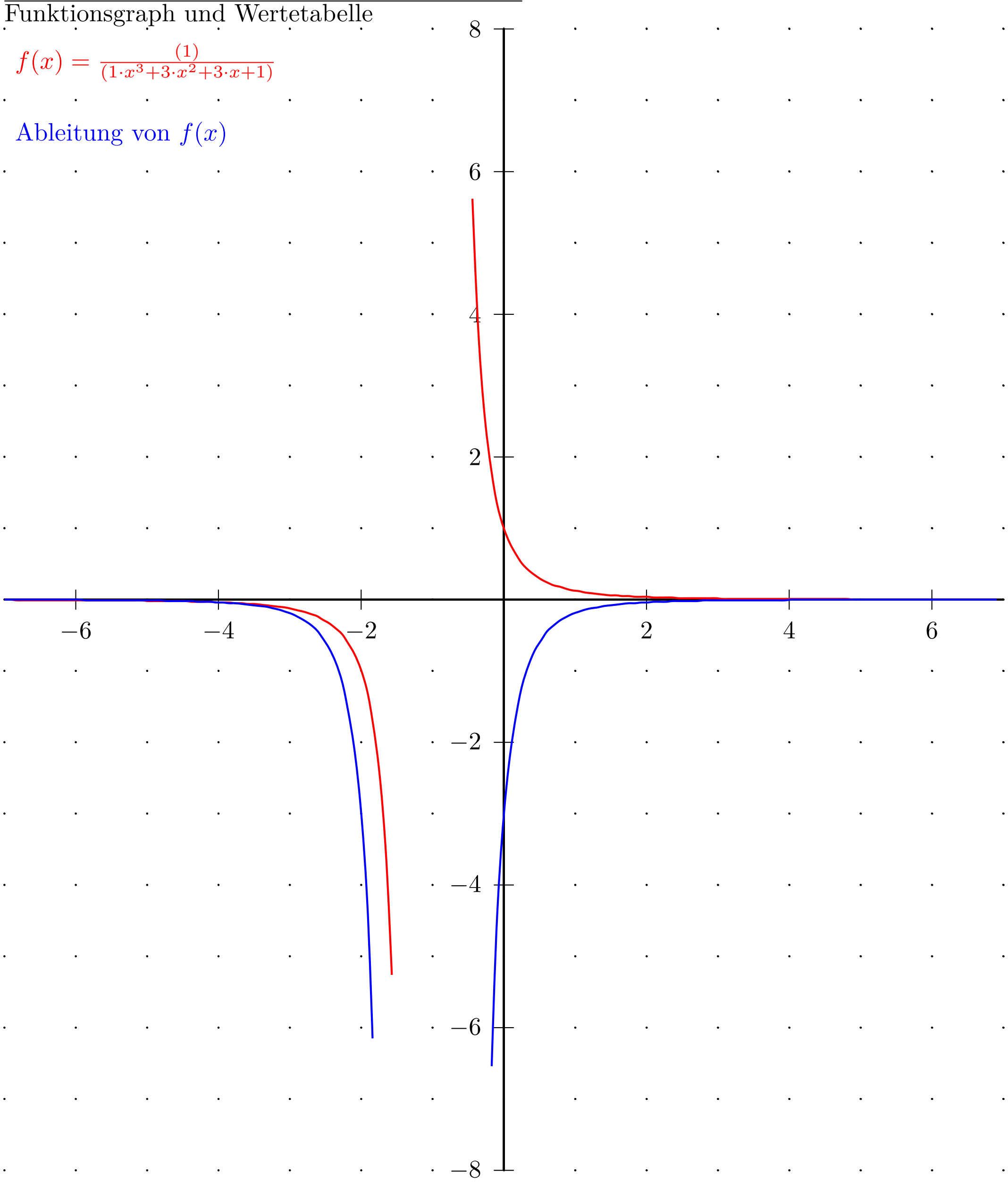
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_5 = -1$; 3-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-1; \infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -1[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-0,00463$	$-0,00231$	$-0,00154$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,00601$	$-0,00328$	$-0,00238$
-6	$-0,008$	$-0,0048$	$-0,00384$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,011$	$-0,00732$	$-0,0065$
-5	$-\frac{1}{64}$	$-0,0117$	$-0,0117$
$-4\frac{1}{2}$	$-0,0233$	$-0,02$	$-0,0228$
-4	$-\frac{1}{27}$	$-0,037$	$-0,0494$
$-3\frac{1}{2}$	$-0,064$	$-0,0768$	$-0,123$
-3	$-\frac{1}{8}$	$-0,188$	$-0,375$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	$-0,593$	$-1,58$
-2	-1	-3	-12
$-1\frac{1}{2}$	-8	$-48,2$	-385
-1	$+unendlich$	$1,07 \cdot 10^7$	$-unendlich$
$-\frac{1}{2}$	8	$-48,2$	385
0	1	-3	12

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	-3	12
$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{27}$	$-0,593$	$1,58$
1	$\frac{1}{8}$	$-0,188$	$0,375$
$1\frac{1}{2}$	$0,064$	$-0,0768$	$0,123$
2	$\frac{1}{27}$	$-0,037$	$0,0494$
$2\frac{1}{2}$	$0,0233$	$-0,02$	$0,0228$
3	$\frac{1}{64}$	$-0,0117$	$0,0117$
$3\frac{1}{2}$	$0,011$	$-0,00732$	$0,0065$
4	$0,008$	$-0,0048$	$0,00384$
$4\frac{1}{2}$	$0,00601$	$-0,00328$	$0,00238$
5	$0,00463$	$-0,00231$	$0,00154$
$5\frac{1}{2}$	$0,00364$	$-0,00168$	$0,00103$
6	$0,00292$	$-0,00125$	$0,000714$
$6\frac{1}{2}$	$0,00237$	$-0,000948$	$0,000506$
7	$0,00195$	$-0,000732$	$0,000366$

Aufgabe (24)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^3+3x^2+3x+1}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2+2x+1=0$

$1x^2+2x+1=0$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-2+0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-2-0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^3+3x^2+3x+1=0$

$x^3+3x^2+3x+1=0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$
\begin{array}{llll}
(x^3 & +3x^2 & +3x & +1 \quad) : (x+1) = x^2+2x+1 \\
-(x^3 & +x^2) & & \\
\hline
 & 2x^2 & +3x & +1 \\
 & -(2x^2 & +2x) & \\
\hline
 & & x & +1 \\
 & & -(x & +1) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

$1x^2+2x+1=0$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-2+0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-2-0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_2 = -1; \quad \text{3-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x+1)^3}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{1}{(x+1)}$

$f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{0\cdot(x+1) - 1\cdot 1}{(x+1)^2}$

$= \frac{0-1}{(x+1)^2}$
$= \frac{-1}{(x+1)^2}$
$= \frac{-1}{(x+1)^2}$
$f''(x) = \frac{0 \cdot (x^2+2x+1) - (-1) \cdot (2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$
$= \frac{0-(-2x-2)}{(x^2+2x+1)^2}$
$= \frac{2x+2}{(x^2+2x+1)^2}$
$= \frac{2x+2}{(x^2+2x+1)^2}$
$= \frac{2(x+1)}{(x+1)^4}$
$= \frac{2}{(x+1)^3}$
$= \frac{2}{x^3+3x^2+3x+1}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$1 = 0$
keine Loesung

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-1; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -1[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^3(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})} = 0$
Horizontale Asymptote: $y = 0$
$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{1}{(x+1)} = \infty$
$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{1}{(x+1)} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-1}{x^2+2x+1} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-1}{x^2+2x+1}$
Zaehler = 0

keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_3 = -1; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung
$f''(x) = \dfrac{2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

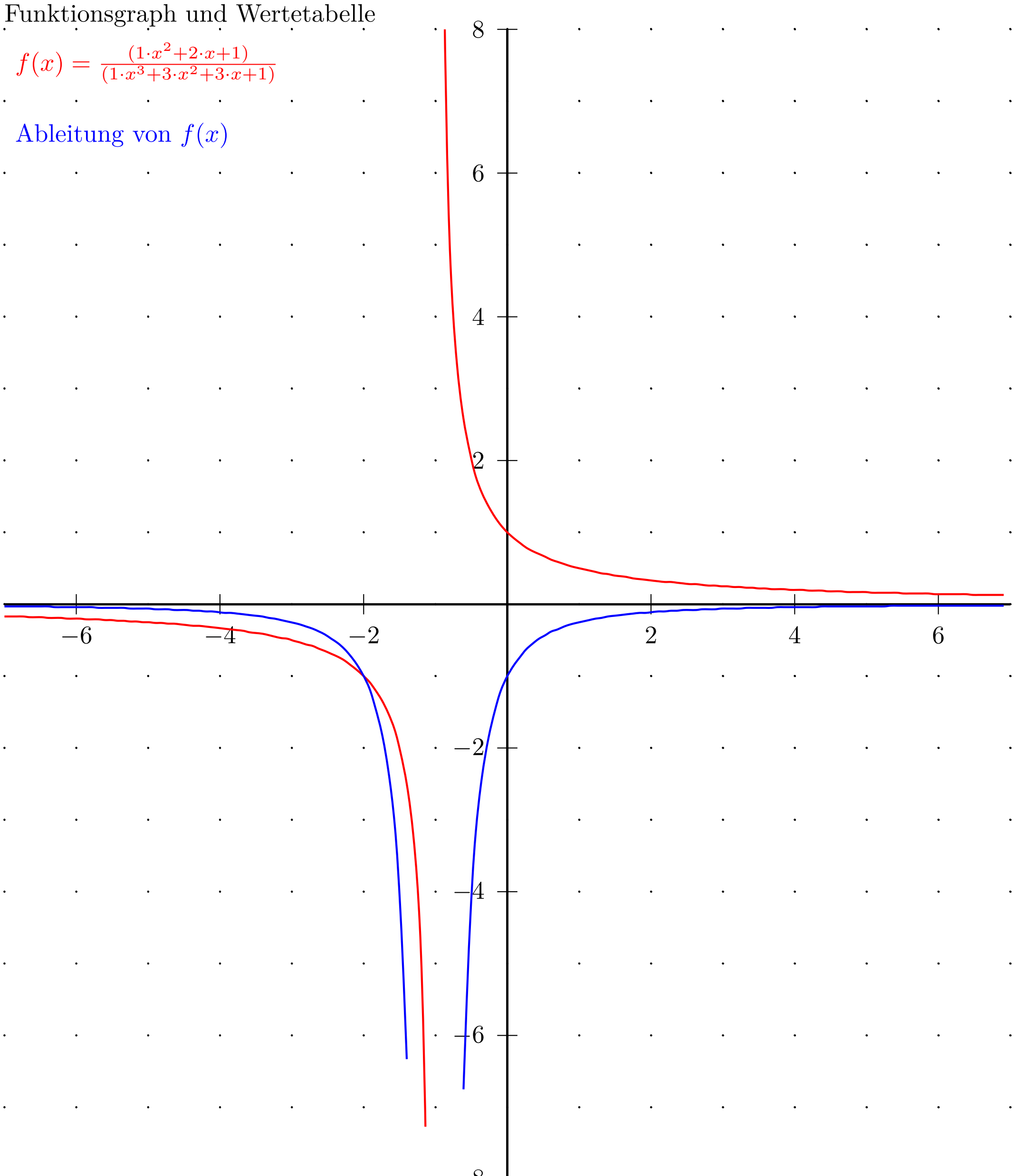
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_4 = -1; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-1; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -1[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$-0,00926$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{11}$	$-0,0331$	$-0,012$
-6	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$-0,016$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,0219$
-5	$-\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$-\frac{1}{32}$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$-0,0466$
-4	$-\frac{1}{3}$	$-0,111$	$-0,0741$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{5}$	$-0,16$	$-0,128$
-3	$-\frac{1}{2}$	$-0,25$	$-0,25$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$-0,445$	$-0,593$
-2	-1	-1	-2
$-1\frac{1}{2}$	-2	-4	-16
-1	NaN	$3265\frac{15}{49}$	NaN
$-\frac{1}{2}$	2	-4	16
0	1	-1	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	-1	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-0,445$	$0,593$
1	$\frac{1}{2}$	$-0,25$	$0,25$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$-0,16$	$0,128$
2	$\frac{1}{3}$	$-0,111$	$0,0741$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$0,0466$
3	$\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$\frac{1}{32}$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$0,0219$
4	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$0,016$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{2}{11}$	$-0,0331$	$0,012$
5	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$0,00926$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{2}{13}$	$-0,0237$	$0,00728$
6	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$0,00583$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{2}{15}$	$-0,0178$	$0,00474$
7	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{64}$	$0,00391$

Aufgabe (25)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2 - 1 = 0$

$1x^2 - 1 = 0 \quad / + 1$

$1x^2 = 1 \quad / : 1$

$x^2 = \dfrac{1}{1}$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$
\begin{array}{llllll}
(x^3 & +3x^2 & +3x & +1 &) : (x+1) = x^2 + 2x + 1 \\
-(x^3 & +x^2) & & & \\
\hline
 & 2x^2 & +3x & +1 & \\
 & -(2x^2 & +2x) & & \\
\hline
 & & x & +1 & \\
 & & -(x & +1) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$1x^2 + 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-2 + 0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-2 - 0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_3 = -1;\quad \text{3-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^3}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{(x-1)}{(x+1)^2}$

$f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 + 2x + 1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x^2 + 2x + 1) - (x-1) \cdot (2x+2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{(x^2 + 2x + 1) - (2x^2 - 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+2x+1)^2}$
$= \dfrac{-(x+1)(x-3)}{(x+1)^4}$
$= \dfrac{-(x-3)}{(x+1)^3}$
$= \dfrac{-x+3}{x^3+3x^2+3x+1}$
$f''(x) = \dfrac{(-1)\cdot(x^3+3x^2+3x+1)-(-x+3)\cdot(3x^2+6x+3)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$
$= \dfrac{(-x^3-3x^2-3x-1)-(-3x^3+3x^2+15x+9)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$
$= \dfrac{2x^3-6x^2-18x-10}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$
$= \dfrac{2x^3-6x^2-18x-10}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x-1=0$
$\underline{x_4 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x<$	-1	$<x<$	1	$<x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]1;\infty[\quad f(x)>0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;1[\quad f(x)<0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^3(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})} = 0$
Horizontale Asymptote: $y=0$
$\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{(x-1)}{(x+1)^2} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{(x-1)}{(x+1)^2} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x=-1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{-x+3}{x^3+3x^2+3x+1} = 0$

$-1x+3=0 \qquad /-3$
$-1x=-3 \qquad /:(-1)$
$x = \dfrac{-3}{-1}$
$x=3$
$\underline{x_5 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(3) = -\dfrac{1}{64}$
$f''(3) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(3/\frac{1}{8})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \dfrac{-x+3}{x^3+3x^2+3x+1}$

Zaehler $= 0$

$\underline{x_6 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_7 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-1; 3[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{2x^3-6x^2-18x-10}{x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1}$

$Zaehler = 0$

$2x^3-6x^2-18x-10 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{llllll}
(2x^3 & -6x^2 & -18x & -10 &) : (x+1) = 2x^2-8x-10 \\
-(2x^3 & +2x^2) & & & \\ \hline
 & -8x^2 & -18x & -10 & \\
 & -(-8x^2 & -8x) & & \\ \hline
 & & -10x & -10 & \\
 & & -(-10x & -10) & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$2x^2-8x-10 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10)}}{2 \cdot 2}$

$x_{1/2} = \dfrac{+8 \pm \sqrt{144}}{4}$

$x_{1/2} = \dfrac{8 \pm 12}{4}$

$x_1 = \dfrac{8+12}{4} \qquad x_2 = \dfrac{8-12}{4}$

$x_1 = 5 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_8 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_9 = 5; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

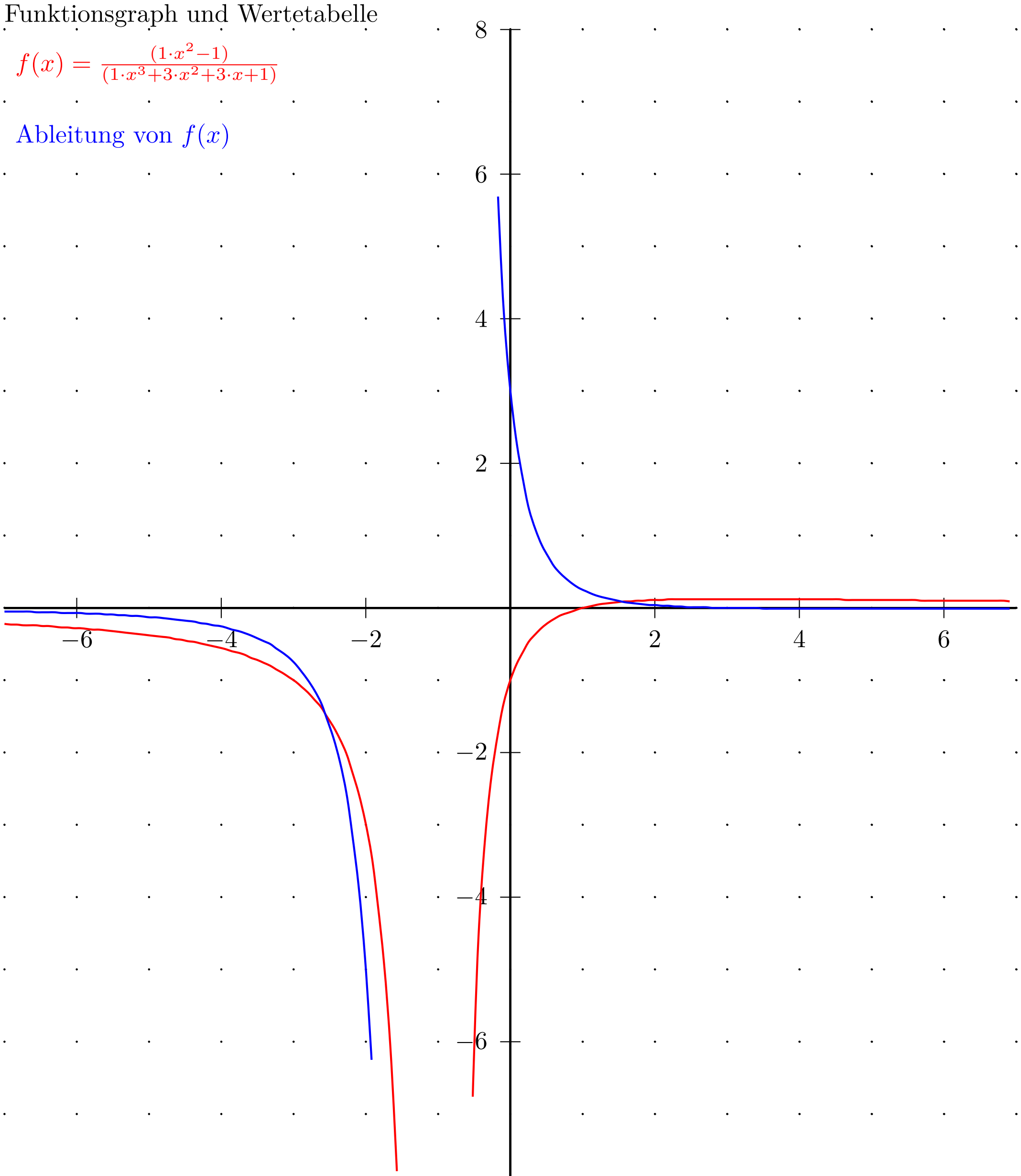
$\underline{x_10 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	5	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]5; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; 5[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{2}{9}$	$-0,0463$	$-\frac{1}{54}$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,248$	$-0,0571$	$-0,0251$
-6	$-\frac{7}{25}$	$-0,072$	$-0,0352$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{26}{81}$	$-0,0933$	$-0,0512$
-5	$-\frac{3}{8}$	$-0,125$	$-0,0781$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{22}{49}$	$-0,175$	$-0,127$
-4	$-\frac{5}{9}$	$-0,259$	$-0,222$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{18}{25}$	$-0,416$	$-0,435$
-3	-1	$-0,75$	-1
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{5}{9}$	$-1,63$	$-2,96$
-2	-3	-5	-14
$-1\frac{1}{2}$	-10	$-36,1$	-208
-1	NaN	$3,27 \cdot 10^3$	NaN
$-\frac{1}{2}$	-6	$28,1$	-176
0	-1	3	-10

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-1	3	-10
$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{9}$	$0,741$	$-1,78$
1	0	$0,25$	$-0,5$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{2}{25}$	$0,096$	$-0,179$
2	$\frac{1}{9}$	$0,037$	$-0,0741$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{6}{49}$	$0,0117$	$-0,0333$
3	$\frac{1}{8}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$-\frac{1}{64}$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{10}{81}$	$-0,00549$	$-0,00732$
4	$\frac{3}{25}$	$-0,008$	$-0,0032$
$4\frac{1}{2}$	$0,116$	$-0,00902$	$-0,00109$
5	$\frac{1}{9}$	$-0,00926$	0
$5\frac{1}{2}$	$0,107$	$-0,0091$	$0,00056$
6	$\frac{5}{49}$	$-0,00875$	$0,000833$
$6\frac{1}{2}$	$0,0978$	$-0,0083$	$0,000948$
7	$\frac{3}{32}$	$-0,00781$	$0,000977$

3 Gebrochen rationale Funktion Zählergrad = Nennergrad

3.1 Aufgaben

(1) $f(x) = \frac{x}{2x+1}$

(2) $f(x) = \frac{-x+2}{\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}}$

(3) $f(x) = \frac{-3x+1}{4x+2}$

(4) $f(x) = \frac{5x+6}{-x}$

(5) $f(x) = \frac{-3x+1}{x+2}$

(6) $f(x) = \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}}{-\frac{1}{4}x-2}$

(7) $f(x) = \frac{-x^2+x}{x^2-1}$

(8) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{2x^2+2x}$

(9) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

(10) $f(x) = \frac{-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{8}}{-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}}$

(11) $f(x) = \frac{x^2-5x-27}{x^2+3x}$

(12) $f(x) = \frac{4x^2+12x+5}{-2x^2+1}$

(13) $f(x) = \frac{5x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$

(14) $f(x) = \frac{5x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$

(15) $f(x) = \frac{x^3+3x^2-4}{x^2}$

(16) $f(x) = \frac{-x^3+3x^2-4}{-\frac{1}{2}x^2-3x-4\frac{1}{2}}$

3.2 Lösungen

Aufgabe (1)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{x}{2x+1}$
Zaehler faktorisieren:
$x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$2x + 1 = 0$

$2x + 1 = 0 \qquad / - 1$
$2x = -1 \qquad / : 2$
$x = \dfrac{-1}{2}$
$x = -\dfrac{1}{2}$
$\underline{x_2 = -\dfrac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \dfrac{x}{2(x+\frac{1}{2})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

$f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x}{x+\frac{1}{2}}$
$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{l} (\frac{1}{2}x \qquad\qquad) : (x+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \\ \underline{-(\frac{1}{2}x \quad +\frac{1}{4})} \\ \qquad\quad -\frac{1}{4} \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{-\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{2}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot(x+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}x\cdot 1}{(x+\frac{1}{2})^2}$
$= \dfrac{(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}) - \frac{1}{2}x}{(x+\frac{1}{2})^2}$
$= \dfrac{\frac{1}{4}}{(x+\frac{1}{2})^2}$
$= \dfrac{\frac{1}{4}}{(x+\frac{1}{2})^2}$
$f''(x) = \dfrac{0\cdot(x^2+x+\frac{1}{4}) - \frac{1}{4}\cdot(2x+1)}{(x^2+x+\frac{1}{4})^2}$
$= \dfrac{0 - (\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})}{(x^2+x+\frac{1}{4})^2}$
$= \dfrac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}{(x^2+x+\frac{1}{4})^2}$
$= \dfrac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}{(x^2+x+\frac{1}{4})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$
$\frac{1}{2}x = 0$
$x_3 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\frac{1}{2}; 0[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x(1)}{x(2+x)} = \frac{0,5}{1} = \frac{1}{2}$

Horizontale Asymptote: $y = \frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{\frac{1}{2}x}{(x+\frac{1}{2})} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^-} \frac{\frac{1}{2}x}{(x+\frac{1}{2})} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -\frac{1}{2}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{\frac{1}{4}}{x^2 + x + \frac{1}{4}} = 0$

keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{\frac{1}{4}}{x^2 + x + \frac{1}{4}}$

Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_4 = -\frac{1}{2}; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]-\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}{x^4 + 2x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}}$

$Zaehler = 0$

$-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0 \qquad / + \frac{1}{4}$

$-\frac{1}{2}x = \frac{1}{4} \qquad / : \left(-\frac{1}{2}\right)$

$x = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}}$

$x = -\frac{1}{2}$

$x_5 = -\frac{1}{2};\quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

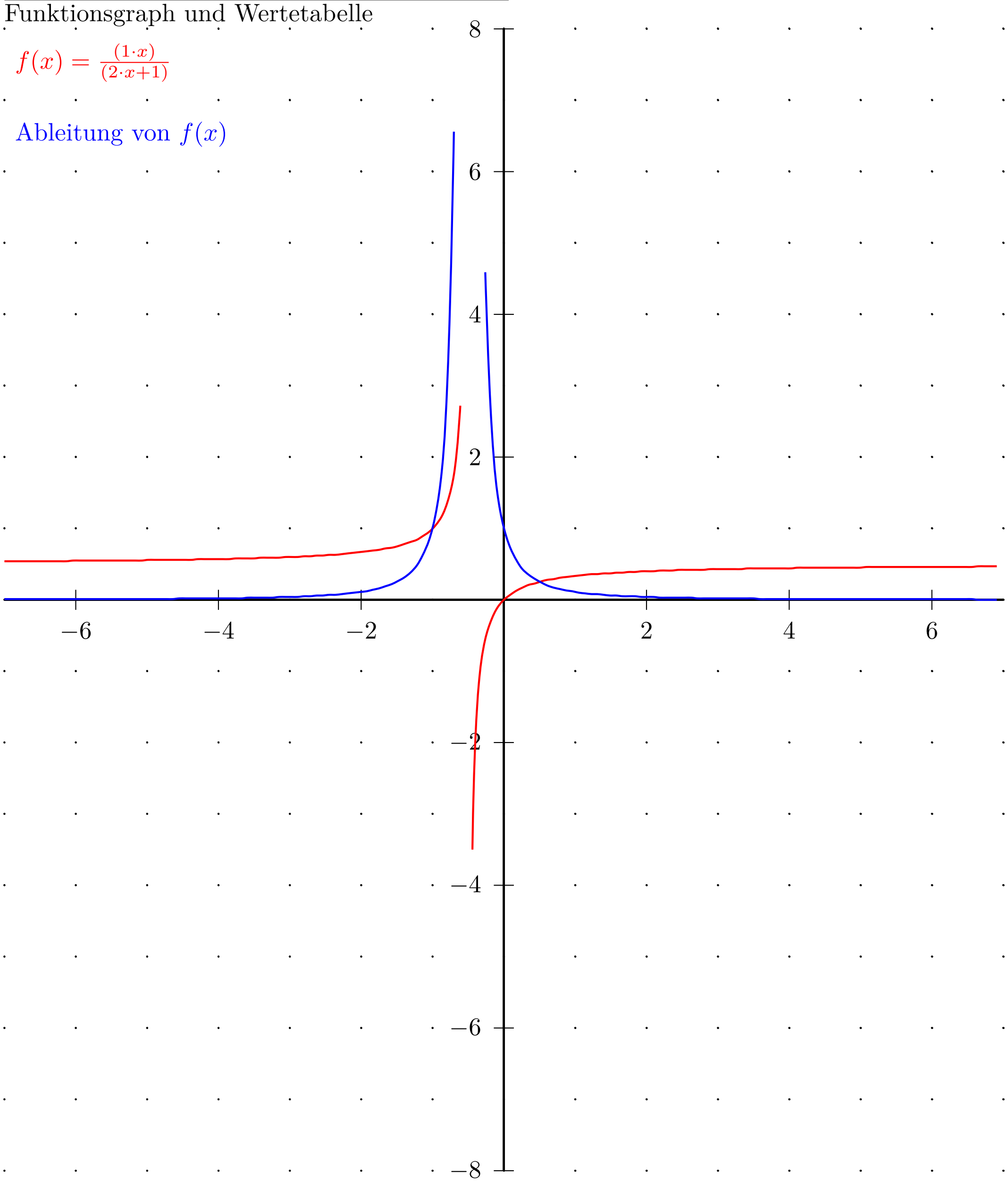
$x_6 = -\frac{1}{2};\quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad f''(x) > 0\quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\frac{1}{2}; \infty[\quad f''(x) < 0\quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{7}{13}$	$0,00592$	$0,00182$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{13}{24}$	$0,00694$	$0,00231$
-6	$\frac{6}{11}$	$0,00826$	$0,00301$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{11}{20}$	$0,01$	$0,004$
-5	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{81}$	$0,00549$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{64}$	$0,00781$
-4	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{49}$	$0,0117$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{54}$
-3	$\frac{3}{5}$	$0,04$	$0,032$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$0,0625$	$0,0625$
-2	$\frac{2}{3}$	$0,111$	$0,148$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$0,25$	$0,5$
-1	1	1	4
$-\frac{1}{2}$	$-unendlich$	$-816\frac{16}{49}$	$+unendlich$
0	0	1	-4

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	1	-4
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$0,25$	$-0,5$
1	$\frac{1}{3}$	$0,111$	$-0,148$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$0,0625$	$-0,0625$
2	$\frac{2}{5}$	$0,04$	$-0,032$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{36}$	$-\frac{1}{54}$
3	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{49}$	$-0,0117$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{64}$	$-0,00781$
4	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{81}$	$-0,00549$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{9}{20}$	$0,01$	$-0,004$
5	$\frac{5}{11}$	$0,00826$	$-0,00301$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{11}{24}$	$0,00694$	$-0,00231$
6	$\frac{6}{13}$	$0,00592$	$-0,00182$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{13}{28}$	$0,0051$	$-0,00146$
7	$\frac{7}{15}$	$0,00444$	$-0,00119$

Aufgabe (2)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{-x+2}{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}$

Zaehler faktorisieren:

$-x + 2 = 0$

$-1x + 2 = 0 \quad / -2$

$-1x = -2 \quad / : (-1)$

$x = \dfrac{-2}{-1}$

$x = 2$

$\underline{x_1 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} = 0$

$\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4} = 0 \quad / + \dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{2}x = \dfrac{1}{4} \quad / : \dfrac{1}{2}$

$x = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}$

$x = \dfrac{1}{2}$

$\underline{x_2 = \dfrac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{-(x-2)}{\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{1}{2} \right\}$

$f(x) = \dfrac{-2x+4}{x - \frac{1}{2}}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{l}
\ \ (-2x \quad +4 \quad) : (x - \frac{1}{2}) = -2 \\
\underline{\ -(-2x \quad +1) \qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad 3
\end{array}$$

$f(x) = -2 + \dfrac{3}{x - \frac{1}{2}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(-2) \cdot (x - \frac{1}{2}) - (-2x+4) \cdot 1}{(x - \frac{1}{2})^2}$

$= \dfrac{(-2x+1) - (-2x+4)}{(x - \frac{1}{2})^2}$

$= \dfrac{-3}{(x - \frac{1}{2})^2}$

$= \dfrac{-3}{(x - \frac{1}{2})^2}$

$f''(x) = \dfrac{0 \cdot (x^2 - x + \frac{1}{4}) - (-3) \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x + \frac{1}{4})^2}$

$= \dfrac{0 - (-6x + 3)}{(x^2 - x + \frac{1}{4})^2}$

$= \frac{6x-3}{(x^2-x+\frac{1}{4})^2}$
$= \frac{6x-3}{(x^2-x+\frac{1}{4})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-2x+4=0$
$x_3 = 2;\quad$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$\frac{1}{2}$	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]\frac{1}{2}; 2[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(-1+\frac{2}{x})}{x(\frac{1}{2}-\frac{\frac{1}{4}}{x})} = \frac{-2}{1} = -2$$

Horizontale Asymptote: $y = -2$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{-2(x-2)}{(x-\frac{1}{2})} = \infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{-2(x-2)}{(x-\frac{1}{2})} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = \frac{1}{2}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-3}{x^2-x+\frac{1}{4}} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-3}{x^2-x+\frac{1}{4}}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_4 = \frac{1}{2};\quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\quad \cup \quad]\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{6x-3}{x^4-2x^3+1\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}}$
$Zaehler = 0$

$6x - 3 = 0 \qquad / + 3$
$6x = 3 \qquad / : 6$
$x = \frac{3}{6}$
$x = \frac{1}{2}$
$x_5 = \frac{1}{2}; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_6 = \frac{1}{2}; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$\frac{1}{2}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]\frac{1}{2}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-2\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{75}$	$-0,0142$
$-6\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{49}$	$-0,0175$
-6	$-2\frac{6}{13}$	$-0,071$	$-0,0218$
$-5\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{36}$
-5	$-2\frac{6}{11}$	$-0,0992$	$-0,0361$
$-4\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{5}$	$-0,12$	$-0,048$
-4	$-2\frac{2}{3}$	$-0,148$	$-0,0658$
$-3\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{4}$	$-0,188$	$-0,0938$
-3	$-2\frac{6}{7}$	$-0,245$	$-0,14$
$-2\frac{1}{2}$	-3	$-0,333$	$-0,222$
-2	$-3\frac{1}{5}$	$-0,48$	$-0,384$
$-1\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$	$-0,75$	$-0,75$
-1	-4	$-1,33$	$-1,78$
$-\frac{1}{2}$	-5	-3	-6
0	-8	-12	$-48,1$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-8	-12	$-48,1$
$\frac{1}{2}$	$+unendlich$	$9795\frac{45}{49}$	$-unendlich$
1	4	-12	$48,1$
$1\frac{1}{2}$	1	-3	6
2	0	$-1,33$	$1,78$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-0,75$	$0,75$
3	$-\frac{4}{5}$	$-0,48$	$0,384$
$3\frac{1}{2}$	-1	$-0,333$	$0,222$
4	$-1\frac{1}{7}$	$-0,245$	$0,14$
$4\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	$-0,188$	$0,0938$
5	$-1\frac{1}{3}$	$-0,148$	$0,0658$
$5\frac{1}{2}$	$-1\frac{2}{5}$	$-0,12$	$0,048$
6	$-1\frac{5}{11}$	$-0,0992$	$0,0361$
$6\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$
7	$-1\frac{7}{13}$	$-0,071$	$0,0218$

Aufgabe (3)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{-3x+1}{4x+2}$
Zaehler faktorisieren:
$-3x+1=0$

$-3x+1=0 \qquad / -1$
$-3x=-1 \qquad / : (-3)$
$x=\dfrac{-1}{-3}$
$x=\dfrac{1}{3}$
$\underline{x_1=\dfrac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$4x+2=0$

$4x+2=0 \qquad / -2$
$4x=-2 \qquad / : 4$
$x=\dfrac{-2}{4}$
$x=-\dfrac{1}{2}$
$\underline{x_2=-\dfrac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \dfrac{-3(x-\frac{1}{3})}{4(x+\frac{1}{2})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

$f(x) = \dfrac{-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}}{x+\frac{1}{2}}$
Polynomdivision :

$$\begin{array}{l} (-\frac{3}{4}x \quad +\frac{1}{4} \quad) : (x+\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4} \\ \underline{-(-\frac{3}{4}x \quad -\frac{3}{8})} \\ \qquad\quad \frac{5}{8} \end{array}$$

$f(x) = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{\frac{5}{8}}{x+\frac{1}{2}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \dfrac{(-\frac{3}{4})\cdot(x+\frac{1}{2}) - (-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4})\cdot 1}{(x+\frac{1}{2})^2}$
$= \dfrac{(-\frac{3}{4}x-\frac{3}{8}) - (-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4})}{(x+\frac{1}{2})^2}$
$= \dfrac{-\frac{5}{8}}{(x+\frac{1}{2})^2}$
$= \dfrac{-\frac{5}{8}}{(x+\frac{1}{2})^2}$
$f''(x) = \dfrac{0\cdot(x^2+x+\frac{1}{4}) - (-\frac{5}{8})\cdot(2x+1)}{(x^2+x+\frac{1}{4})^2}$
$= \dfrac{0-(-1\frac{1}{4}x-\frac{5}{8})}{(x^2+x+\frac{1}{4})^2}$

$= \frac{1\frac{1}{4}x+\frac{5}{8}}{(x^2+x+\frac{1}{4})^2}$
$= \frac{1\frac{1}{4}x+\frac{5}{8}}{(x^2+x+\frac{1}{4})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-\frac{3}{4}x+\frac{1}{4} = 0$
$x_3 = \frac{1}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]\frac{1}{3}; \infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x(-3+x)}{x(4+\frac{2}{x})} = \frac{-0,75}{1} = -\frac{3}{4}$
Horizontale Asymptote: $y = -\frac{3}{4}$
$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^+} \frac{-\frac{3}{4}(x-\frac{1}{3})}{(x+\frac{1}{2})} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}^-} \frac{-\frac{3}{4}(x-\frac{1}{3})}{(x+\frac{1}{2})} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -\frac{1}{2}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-\frac{5}{8}}{x^2+x+\frac{1}{4}} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-\frac{5}{8}}{x^2+x+\frac{1}{4}}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_4 = -\frac{1}{2}; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]-\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{1\frac{1}{4}x + \frac{5}{8}}{x^4 + 2x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}}$$
$Zaehler = 0$

$1\frac{1}{4}x + \frac{5}{8} = 0 \qquad / - \frac{5}{8}$
$1\frac{1}{4}x = -\frac{5}{8} \qquad / : 1\frac{1}{4}$
$x = \frac{-\frac{5}{8}}{1\frac{1}{4}}$
$x = -\frac{1}{2}$
$\underline{x_5 = -\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

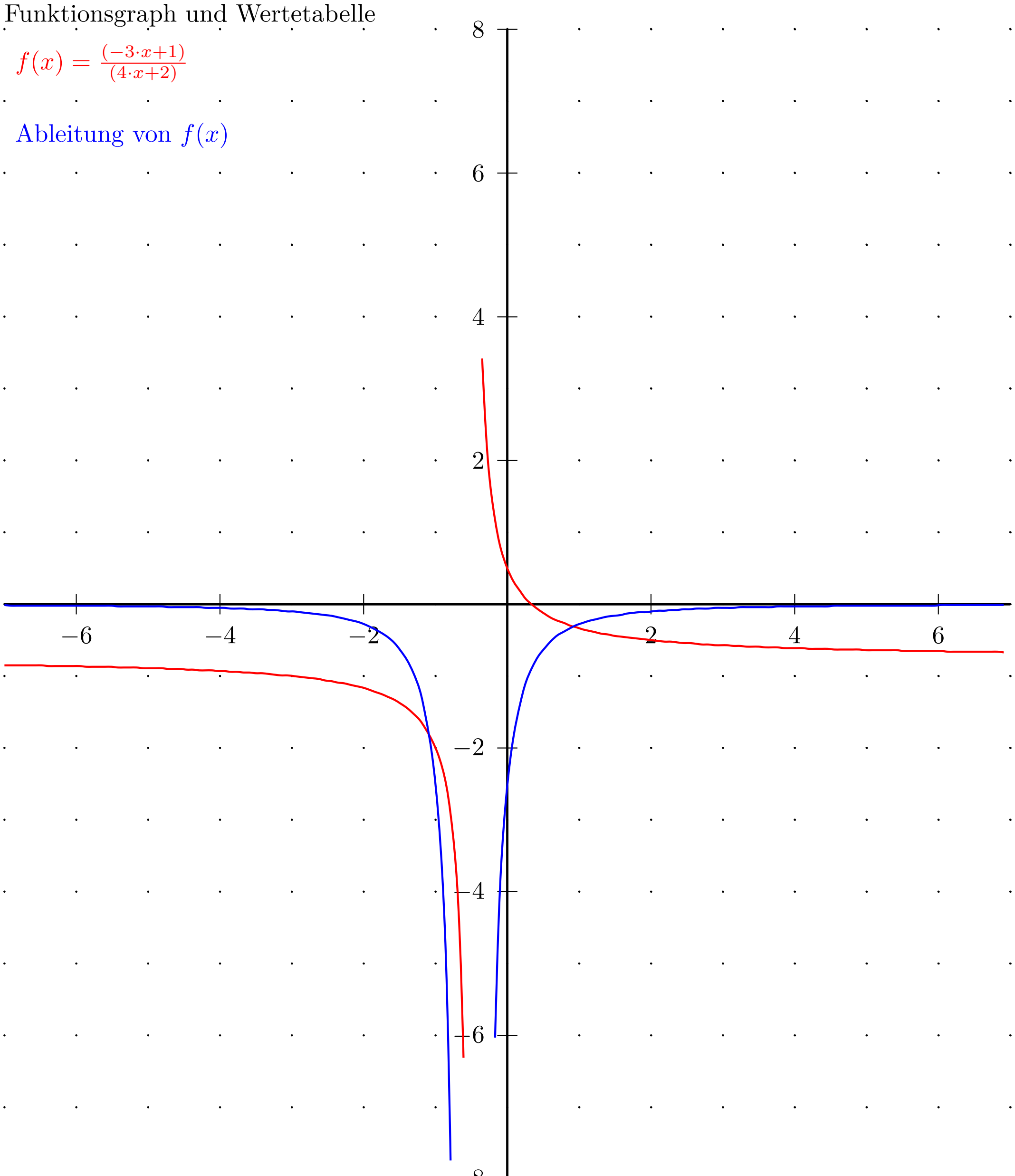
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_6 = -\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\frac{1}{2}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; -\frac{1}{2}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{11}{13}$	$-0,0148$	$-0,00455$
$-6\frac{1}{2}$	$-\frac{41}{48}$	$-0,0174$	$-0,00579$
-6	$-\frac{19}{22}$	$-0,0207$	$-0,00751$
$-5\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{40}$	$-0,01$
-5	$-\frac{8}{9}$	$-0,0309$	$-0,0137$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{29}{32}$	$-0,0391$	$-0,0195$
-4	$-\frac{13}{14}$	$-0,051$	$-0,0292$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{23}{24}$	$-0,0694$	$-0,0463$
-3	-1	$-0,1$	$-0,08$
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{16}$	$-0,156$	$-0,156$
-2	$-1\frac{1}{6}$	$-0,278$	$-0,37$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{8}$	$-0,625$	$-1,25$
-1	-2	$-2,5$	-10
$-\frac{1}{2}$	$+unendlich$	$2040\frac{40}{49}$	$-unendlich$
0	$\frac{1}{2}$	$-2,5$	10

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{2}$	$-2,5$	10
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	$-0,625$	$1,25$
1	$-\frac{1}{3}$	$-0,278$	$0,37$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{16}$	$-0,156$	$0,156$
2	$-\frac{1}{2}$	$-0,1$	$0,08$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{24}$	$-0,0694$	$0,0463$
3	$-\frac{4}{7}$	$-0,051$	$0,0292$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{19}{32}$	$-0,0391$	$0,0195$
4	$-\frac{11}{18}$	$-0,0309$	$0,0137$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{40}$	$0,01$
5	$-\frac{7}{11}$	$-0,0207$	$0,00751$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{31}{48}$	$-0,0174$	$0,00579$
6	$-\frac{17}{26}$	$-0,0148$	$0,00455$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{37}{56}$	$-0,0128$	$0,00364$
7	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{90}$	$0,00296$

Aufgabe (4)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{5x+6}{-x}$

Zaehler faktorisieren:

$5x + 6 = 0$

$5x + 6 = 0 \qquad / - 6$

$5x = -6 \qquad / : 5$

$x = \dfrac{-6}{5}$

$x = -1\dfrac{1}{5}$

$\underline{x_1 = -1\frac{1}{5}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$-x = 0$

$x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\underline{x_2 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{5(x+1\frac{1}{5})}{-x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \dfrac{-5x-6}{x}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{l} (-5x \quad -6 \quad) : (x) = -5 \\ -(-5x) \\ \hline \qquad\quad -6 \end{array}$$

$f(x) = -5 + \dfrac{-6}{x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(-5) \cdot x - (-5x-6) \cdot 1}{(x)^2}$

$= \dfrac{(-5x) - (-5x-6)}{(x)^2}$

$= \dfrac{6}{(x)^2}$

$= \dfrac{6}{(x)^2}$

$f''(x) = \dfrac{0 \cdot x^2 - 6 \cdot 2x}{(x^2)^2}$

$= \dfrac{0 - 12x}{(x^2)^2}$

$= \dfrac{-12x}{(x^2)^2}$

$= \dfrac{-12x}{(x^2)^2}$

$= \dfrac{-12x}{x^4}$

$= \dfrac{-12}{x^3}$

$= \dfrac{-12}{x^3}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-5x - 6 = 0$
$x_3 = -1\dfrac{1}{5}; \quad$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-1\frac{1}{5}$	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-1\dfrac{1}{5}; 0[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -1\dfrac{1}{5}[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(5+\frac{6}{x})}{x(-1)} = \frac{-5}{1} = -5$$
Horizontale Asymptote: $y = -5$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-5(x+1\frac{1}{5})}{x} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{-5(x+1\frac{1}{5})}{x} = \infty$$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{6}{x^2} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \dfrac{6}{x^2}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_4 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung
$f''(x) = \dfrac{-12}{x^3}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

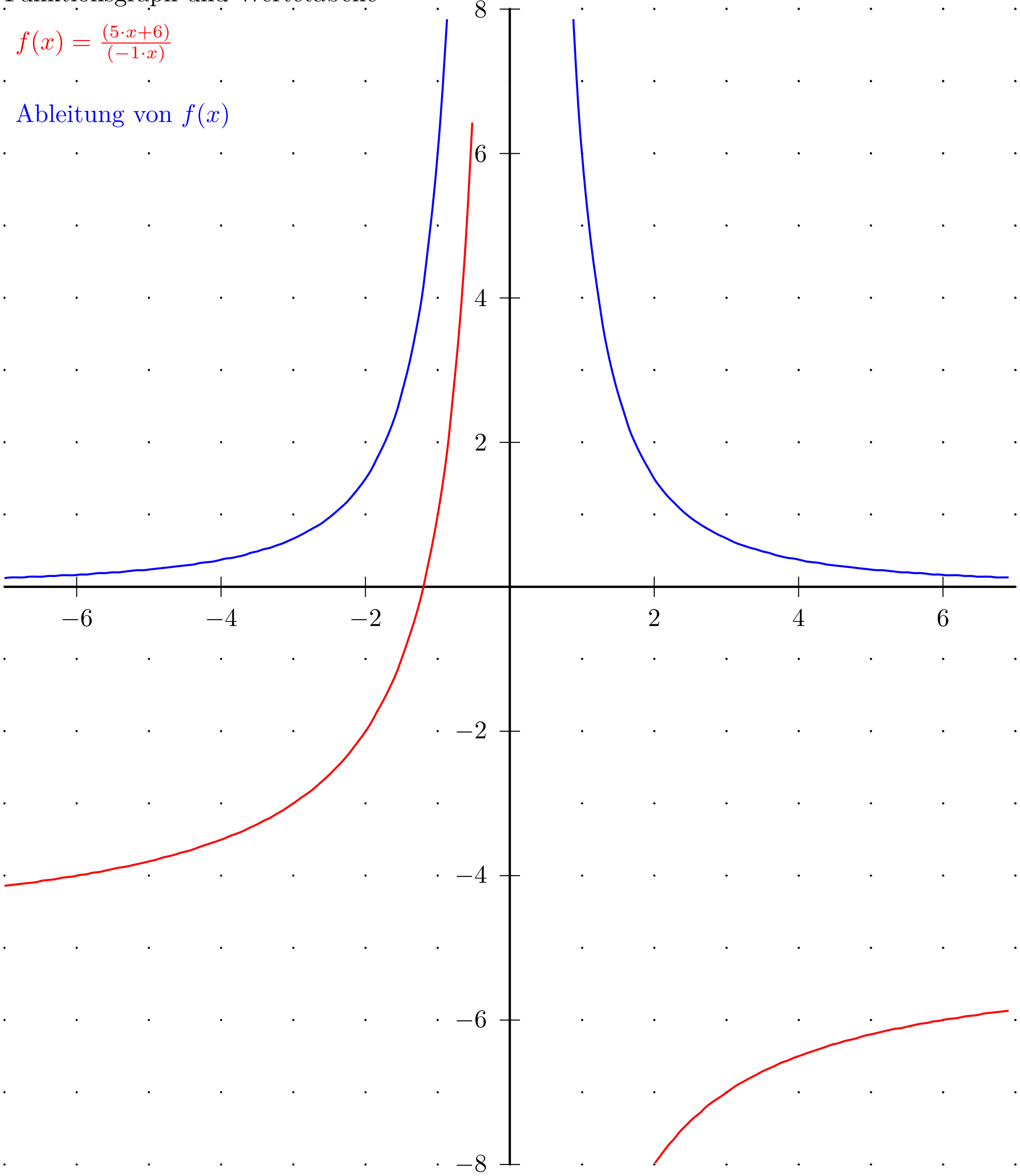
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_5 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[$	$f''(x) > 0$	linksgekrümmt

$x \in]0; \infty[$	$f''(x) < 0$	rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-4\frac{1}{7}$	$\frac{6}{49}$	$0,035$
$-6\frac{1}{2}$	$-4\frac{1}{13}$	$0,142$	$0,0437$
-6	-4	$0,167$	$\frac{1}{18}$
$-5\frac{1}{2}$	$-3\frac{10}{11}$	$0,198$	$0,0721$
-5	$-3\frac{4}{5}$	$0,24$	$0,096$
$-4\frac{1}{2}$	$-3\frac{2}{3}$	$0,296$	$0,132$
-4	$-3\frac{1}{2}$	$0,375$	$0,188$
$-3\frac{1}{2}$	$-3\frac{2}{7}$	$0,49$	$0,28$
-3	-3	$0,667$	$0,444$
$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{5}$	$0,96$	$0,768$
-2	-2	$1,5$	$1,5$
$-1\frac{1}{2}$	-1	$2,67$	$3,56$
-1	1	6	12
$-\frac{1}{2}$	7	24	$96,1$
0	$-unendlich$	$-19591\frac{41}{49}$	$+unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-unendlich$	$-19591\frac{41}{49}$	$+unendlich$
$\frac{1}{2}$	-17	24	$-96,1$
1	-11	6	-12
$1\frac{1}{2}$	-9	$2,67$	$-3,56$
2	-8	$1,5$	$-1,5$
$2\frac{1}{2}$	$-7\frac{2}{5}$	$0,96$	$-0,768$
3	-7	$0,667$	$-0,444$
$3\frac{1}{2}$	$-6\frac{5}{7}$	$0,49$	$-0,28$
4	$-6\frac{1}{2}$	$0,375$	$-0,188$
$4\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{3}$	$0,296$	$-0,132$
5	$-6\frac{1}{5}$	$0,24$	$-0,096$
$5\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{11}$	$0,198$	$-0,0721$
6	-6	$0,167$	$-\frac{1}{18}$
$6\frac{1}{2}$	$-5\frac{12}{13}$	$0,142$	$-0,0437$
7	$-5\frac{6}{7}$	$\frac{6}{49}$	$-0,035$

Aufgabe (5)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{-3x+1}{x+2}$
Zaehler faktorisieren:
$-3x+1=0$

$-3x+1=0 \qquad /-1$
$-3x=-1 \qquad /:(-3)$
$x=\frac{-1}{-3}$
$x=\frac{1}{3}$
$\underline{x_1=\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x+2=0$

$x+2=0 \qquad /-2$
$x=-2$
$\underline{x_2=-2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{-3(x-\frac{1}{3})}{(x+2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
$f(x) = \frac{-3x+1}{x+2}$
Polynomdivision :

$$\begin{array}{l} (-3x \quad +1 \quad):(x+2) = -3 \\ \underline{-(-3x \quad -6) \qquad\qquad\qquad} \\ \qquad\quad 7 \end{array}$$

$f(x) = -3 + \frac{7}{x+2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \frac{(-3)\cdot(x+2)-(-3x+1)\cdot 1}{(x+2)^2}$
$= \frac{(-3x-6)-(-3x+1)}{(x+2)^2}$
$= \frac{-7}{(x+2)^2}$
$= \frac{-7}{(x+2)^2}$
$f''(x) = \frac{0\cdot(x^2+4x+4)-(-7)\cdot(2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \frac{0-(-14x-28)}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \frac{14x+28}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \frac{14x+28}{(x^2+4x+4)^2}$
$= \frac{14(x+2)}{(x+2)^4}$
$= \frac{14}{(x+2)^3}$

$= \frac{14}{x^3+6x^2+12x+8}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-3x+1=0$
$x_3 = \frac{1}{3}$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-2; \frac{1}{3}[$ $\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]\frac{1}{3}; \infty[$ $\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x(-3+x)}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{-3}{1} = -3$

Horizontale Asymptote: $y = -3$
$\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{-3(x-\frac{1}{3})}{(x+2)} = \infty$
$\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{-3(x-\frac{1}{3})}{(x+2)} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-7}{x^2+4x+4} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-7}{x^2+4x+4}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_4 = -2$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; \infty[$ $\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{14}{x^3+6x^2+12x+8}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

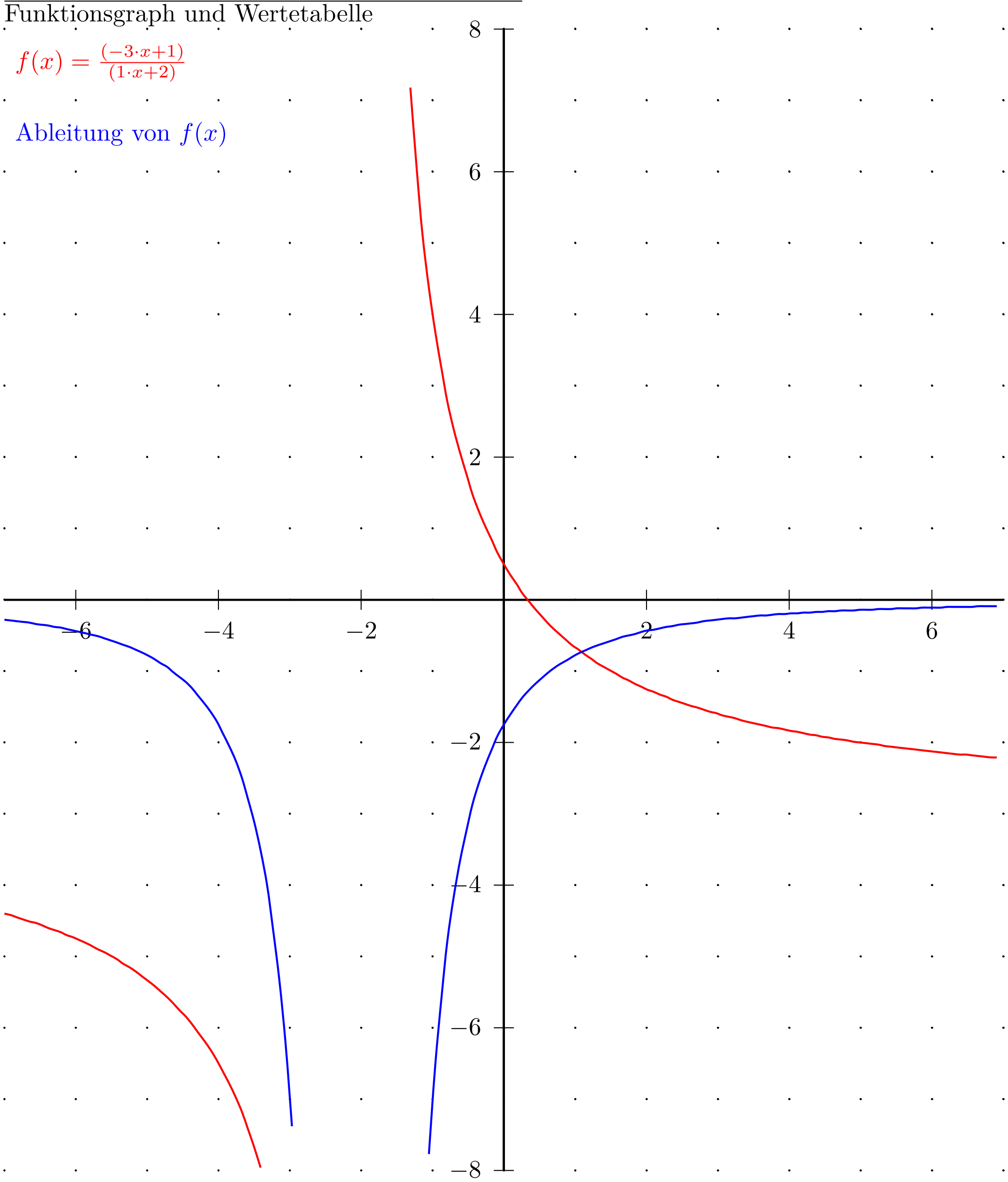
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_5 = -2$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-2; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; -2[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-4\frac{2}{5}$	$-0,28$	$-0,112$
$-6\frac{1}{2}$	$-4\frac{5}{9}$	$-0,346$	$-0,154$
-6	$-4\frac{3}{4}$	$-0,438$	$-0,219$
$-5\frac{1}{2}$	-5	$-0,571$	$-0,327$
-5	$-5\frac{1}{3}$	$-0,778$	$-0,519$
$-4\frac{1}{2}$	$-5\frac{4}{5}$	$-1,12$	$-0,896$
-4	$-6\frac{1}{2}$	$-1,75$	$-1,75$
$-3\frac{1}{2}$	$-7\frac{2}{3}$	$-3,11$	$-4,15$
-3	-10	-7	-14
$-2\frac{1}{2}$	-17	-28	-112
-2	$+unendlich$	$22857\frac{1}{7}$	$-unendlich$
$-1\frac{1}{2}$	11	-28	112
-1	4	-7	14
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{3}$	$-3,11$	$4,15$
0	$\frac{1}{2}$	$-1,75$	$1,75$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{2}$	$-1,75$	$1,75$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{5}$	$-1,12$	$0,896$
1	$-\frac{2}{3}$	$-0,778$	$0,519$
$1\frac{1}{2}$	-1	$-0,571$	$0,327$
2	$-1\frac{1}{4}$	$-0,438$	$0,219$
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{4}{9}$	$-0,346$	$0,154$
3	$-1\frac{3}{5}$	$-0,28$	$0,112$
$3\frac{1}{2}$	$-1\frac{8}{11}$	$-0,231$	$0,0841$
4	$-1\frac{5}{6}$	$-0,194$	$0,0648$
$4\frac{1}{2}$	$-1\frac{12}{13}$	$-0,166$	$0,051$
5	-2	$-\frac{1}{7}$	$\frac{2}{49}$
$5\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{15}$	$-0,124$	$0,0332$
6	$-2\frac{1}{8}$	$-\frac{7}{64}$	$0,0273$
$6\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{17}$	$-0,0969$	$0,0228$
7	$-2\frac{2}{9}$	$-\frac{7}{81}$	$0,0192$

Aufgabe (6)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}}{-\frac{1}{4}x - 2}$

Zaehler faktorisieren:

$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{5} = 0$

$-\frac{1}{3}x + \frac{1}{5} = 0 \qquad / -\frac{1}{5}$

$-\frac{1}{3}x = -\frac{1}{5} \qquad / : \left(-\frac{1}{3}\right)$

$x = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{1}{3}}$

$x = \frac{3}{5}$

$\underline{x_1 = \frac{3}{5}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$-\frac{1}{4}x - 2 = 0$

$-\frac{1}{4}x - 2 = 0 \qquad / + 2$

$-\frac{1}{4}x = 2 \qquad / : \left(-\frac{1}{4}\right)$

$x = \frac{2}{-\frac{1}{4}}$

$x = -8$

$\underline{x_2 = -8; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{-\frac{1}{3}(x - \frac{3}{5})}{-\frac{1}{4}(x + 8)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-8\}$

$f(x) = \frac{1\frac{1}{3}x - \frac{4}{5}}{x + 8}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{lll} (1\frac{1}{3}x & -\frac{4}{5} &) : (x+8) = 1\frac{1}{3} \\ -(1\frac{1}{3}x & +10\frac{2}{3}) & \\ \hline & -11\frac{7}{15} & \end{array}$$

$f(x) = 1\frac{1}{3} + \frac{-11\frac{7}{15}}{x + 8}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{1\frac{1}{3} \cdot (x+8) - (1\frac{1}{3}x - \frac{4}{5}) \cdot 1}{(x+8)^2}$

$= \frac{(1\frac{1}{3}x + 10\frac{2}{3}) - (1\frac{1}{3}x - \frac{4}{5})}{(x+8)^2}$

$= \frac{11\frac{7}{15}}{(x+8)^2}$

$= \frac{11\frac{7}{15}}{(x+8)^2}$

$f''(x) = \frac{0 \cdot (x^2 + 16x + 64) - 11\frac{7}{15} \cdot (2x + 16)}{(x^2 + 16x + 64)^2}$

$= \frac{0-(22\frac{14}{15}x+183\frac{7}{15})}{(x^2+16x+64)^2}$
$= \frac{-22\frac{14}{15}x-183\frac{7}{15}}{(x^2+16x+64)^2}$
$= \frac{-22\frac{14}{15}x-183\frac{7}{15}}{(x^2+16x+64)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$1\frac{1}{3}x - \frac{4}{5} = 0$
$x_3 = \frac{3}{5}$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-8	$< x <$	$\frac{3}{5}$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -8[\quad \cup \quad]\frac{3}{5}; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-8; \frac{3}{5}[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(-\frac{1}{3}+\frac{\frac{1}{5}}{x})}{x(-\frac{1}{4}-\frac{2}{x})} = \frac{1,33333333333333}{1} = 1\frac{1}{3}$$

Horizontale Asymptote: $y = 1\frac{1}{3}$
$\lim_{x\to-8^+} \frac{1\frac{1}{3}(x-\frac{3}{5})}{(x+8)} = -\infty$
$\lim_{x\to-8^-} \frac{1\frac{1}{3}(x-\frac{3}{5})}{(x+8)} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -8$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{11\frac{7}{15}}{x^2+16x+64} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{11\frac{7}{15}}{x^2+16x+64}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_4 = -8$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	-8	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -8[\quad \cup \quad]-8; \infty[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{-22\frac{14}{15}x - 183\frac{7}{15}}{x^4 + 32x^3 + 384x^2 + 2,05 \cdot 10^3 x + 4,1 \cdot 10^3}$
$Zaehler = 0$

$-22\dfrac{14}{15}x - 183\dfrac{7}{15} = 0 \qquad / + 183\dfrac{7}{15}$
$-22\dfrac{14}{15}x = 183\dfrac{7}{15} \qquad / : \left(-22\dfrac{14}{15}\right)$
$x = \dfrac{183\frac{7}{15}}{-22\frac{14}{15}}$
$x = -8$
$x_5 = -8; \quad$ 1-fache Nullstelle

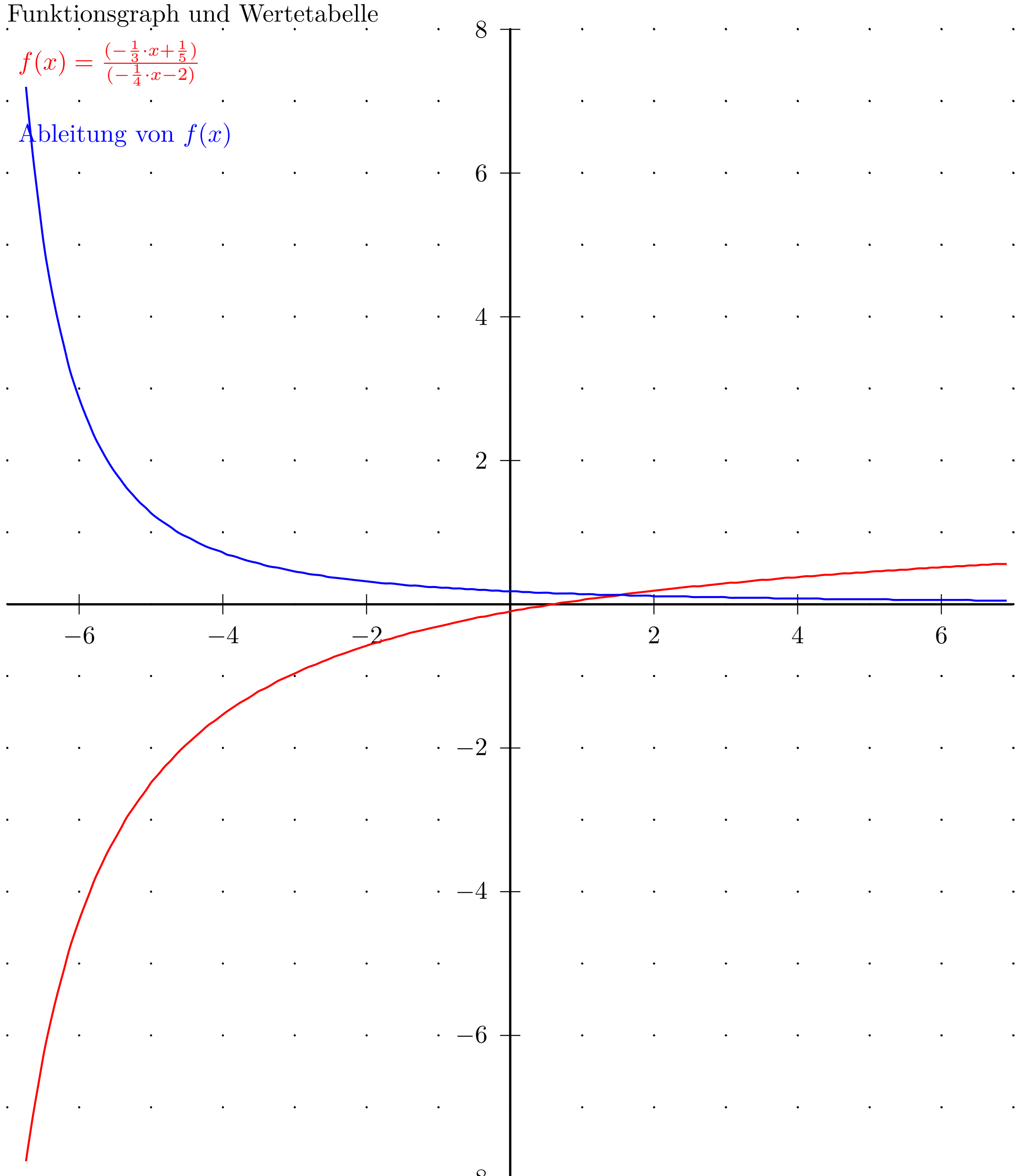
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_6 = -8; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-8	$< x <$	-8	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -8[\quad \cup \quad]-8; -8[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-8; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-10\frac{2}{15}$	$11,5$	$-22,9$
$-6\frac{1}{2}$	$-6\frac{14}{45}$	$5,1$	$-6,8$
-6	$-4\frac{2}{5}$	$2,87$	$-2,87$
$-5\frac{1}{2}$	$-3\frac{19}{75}$	$1,83$	$-1,47$
-5	$-2\frac{22}{45}$	$1,27$	$-0,849$
$-4\frac{1}{2}$	$-1\frac{33}{35}$	$0,936$	$-0,535$
-4	$-1\frac{8}{15}$	$0,717$	$-0,358$
$-3\frac{1}{2}$	$-1,21$	$0,566$	$-0,252$
-3	$-\frac{24}{25}$	$0,459$	$-0,183$
$-2\frac{1}{2}$	$-0,752$	$0,379$	$-0,138$
-2	$-\frac{26}{45}$	$0,319$	$-0,106$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{28}{65}$	$0,271$	$-0,0835$
-1	$-0,305$	$0,234$	$-0,0669$
$-\frac{1}{2}$	$-0,196$	$0,204$	$-0,0544$
0	$-\frac{1}{10}$	$0,179$	$-0,0448$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\frac{1}{10}$	$0,179$	$-0,0448$
$\frac{1}{2}$	$-0,0157$	$0,159$	$-0,0373$
1	$0,0593$	$0,142$	$-0,0315$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{12}{95}$	$0,127$	$-0,0267$
2	$\frac{14}{75}$	$0,115$	$-0,0229$
$2\frac{1}{2}$	$0,241$	$0,104$	$-0,0198$
3	$\frac{16}{55}$	$0,0948$	$-0,0172$
$3\frac{1}{2}$	$0,336$	$0,0867$	$-0,0151$
4	$\frac{17}{45}$	$0,0796$	$-0,0133$
$4\frac{1}{2}$	$0,416$	$0,0734$	$-0,0117$
5	$0,451$	$0,0679$	$-0,0104$
$5\frac{1}{2}$	$0,484$	$0,0629$	$-0,00932$
6	$\frac{18}{35}$	$0,0585$	$-0,00836$
$6\frac{1}{2}$	$0,543$	$0,0545$	$-0,00752$
7	$0,569$	$0,051$	$-0,0068$

Aufgabe (7)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{-x^2+x}{x^2-1}$

Zaehler faktorisieren:

$-x^2+x=0$

$x(-x+1)=0 \Rightarrow x=0 \quad \wedge \quad -x+1=0$

$-1x+1=0 \qquad /-1$

$-1x=-1 \qquad /:(-1)$

$x=\dfrac{-1}{-1}$

$x=1$

$\underline{x_1=0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2=1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2-1=0$

$1x^2-1=0 \qquad /+1$

$1x^2=1 \qquad /:1$

$x^2=\dfrac{1}{1}$

$x=\pm\sqrt{1}$

$x_1=1 \qquad x_2=-1$

$\underline{x_3=-1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_4=1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{-x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{-x}{(x+1)}$

$f(x) = \dfrac{-x}{x+1}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{l} \ (-x \qquad\qquad):(x+1)=-1 \\ \underline{-(-x \quad -1)\qquad\qquad\qquad\qquad} \\ \qquad\quad 1 \end{array}$$

$f(x) = -1+\dfrac{1}{x+1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(-1)\cdot(x+1)-(-x)\cdot 1}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{(-x-1)-(-x)}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{-1}{(x+1)^2}$

$= \dfrac{-1}{(x+1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{0\cdot(x^2+2x+1)-(-1)\cdot(2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \dfrac{0-(-2x-2)}{(x^2+2x+1)^2}$

$= \frac{2x+2}{(x^2+2x+1)^2}$
$= \frac{2x+2}{(x^2+2x+1)^2}$
$= \frac{2(x+1)}{(x+1)^4}$
$= \frac{2}{(x+1)^3}$
$= \frac{2}{x^3+3x^2+3x+1}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-x = 0$
$x_5 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-1; 0[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(-1+x)}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \frac{-1}{1} = -1$
Horizontale Asymptote: $y = -1$
$\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{-x}{(x+1)} = \infty$
$\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{-x}{(x+1)} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-1}{x^2+2x+1} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-1}{x^2+2x+1}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_6 = -1; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{2}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

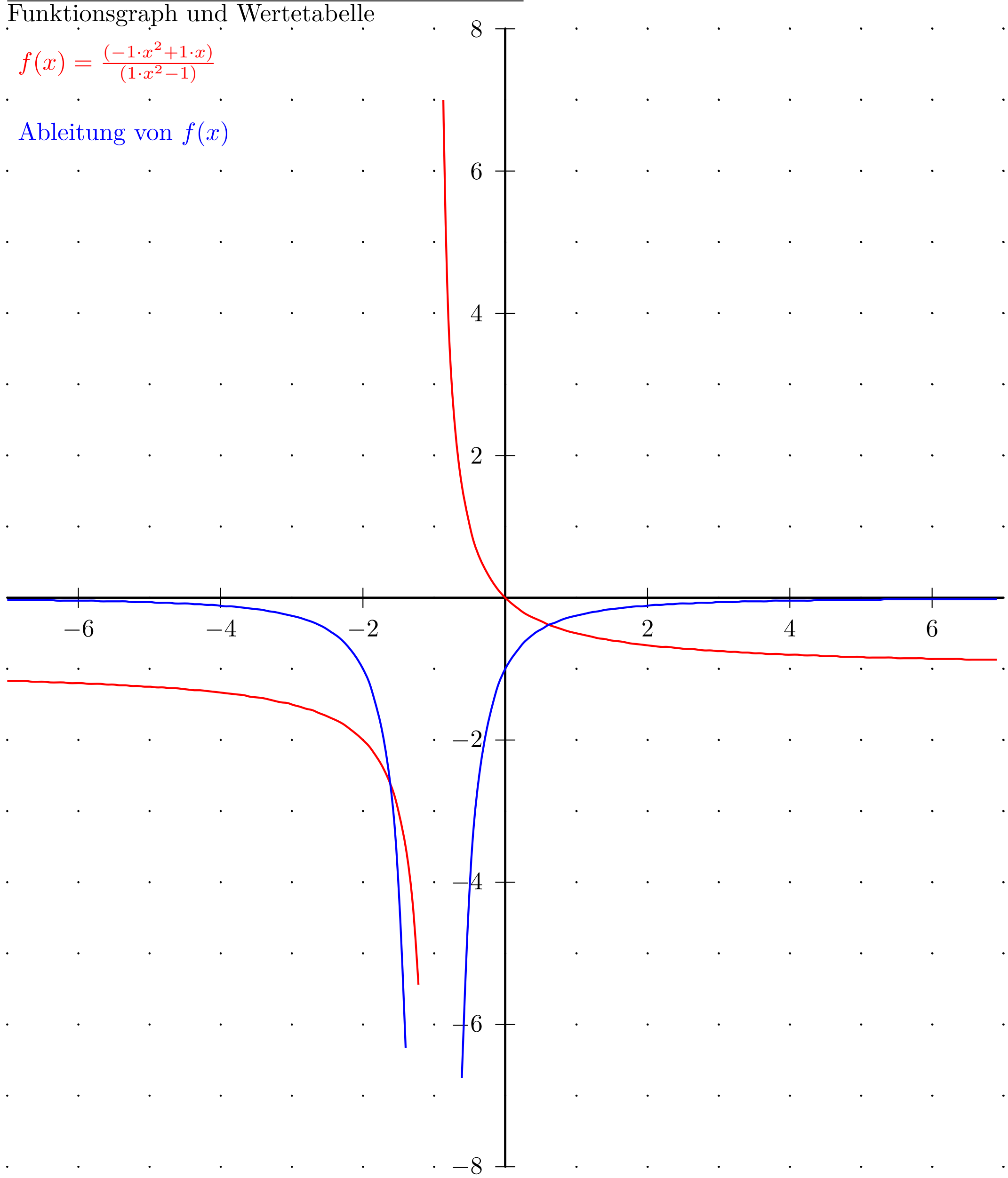
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_7 = -1;$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-1;\infty[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty;-1[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-1\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$-0,00926$
$-6\frac{1}{2}$	$-1\frac{2}{11}$	$-0,0331$	$-0,012$
-6	$-1\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$-0,016$
$-5\frac{1}{2}$	$-1\frac{2}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$-0,0219$
-5	$-1\frac{1}{4}$	$-0,0625$	$-\frac{1}{32}$
$-4\frac{1}{2}$	$-1\frac{2}{7}$	$-0,0816$	$-0,0466$
-4	$-1\frac{1}{3}$	$-0,111$	$-0,0741$
$-3\frac{1}{2}$	$-1\frac{2}{5}$	$-0,16$	$-0,128$
-3	$-1\frac{1}{2}$	$-0,25$	$-0,25$
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{2}{3}$	$-0,445$	$-0,593$
-2	-2	-1	-2
$-1\frac{1}{2}$	-3	-4	-16
-1	$-unendlich$	$3265\frac{15}{49}$	$+unendlich$
$-\frac{1}{2}$	1	-4	16
0	0	-1	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	-1	2
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-0,445$	$0,593$
1	NaN	$-0,25$	NaN
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{5}$	$-0,16$	$0,128$
2	$-\frac{2}{3}$	$-0,111$	$0,0741$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{7}$	$-0,0816$	$0,0466$
3	$-\frac{3}{4}$	$-0,0625$	$\frac{1}{32}$
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{9}$	$-\frac{4}{81}$	$0,0219$
4	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{25}$	$0,016$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{11}$	$-0,0331$	$0,012$
5	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{36}$	$0,00926$
$5\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{13}$	$-0,0237$	$0,00728$
6	$-\frac{6}{7}$	$-\frac{1}{49}$	$0,00583$
$6\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{15}$	$-0,0178$	$0,00474$
7	$-\frac{7}{8}$	$-\frac{1}{64}$	$0,00391$

Aufgabe (8)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{2x^2+2x}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2+2x+1=0$

$1x^2+2x+1=0$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-2+0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-2-0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$2x^2+2x=0$

$x(2x+2)=0 \Rightarrow x=0 \quad \wedge \quad 2x+2=0$

$2x+2=0 \qquad /-2$

$2x=-2 \qquad /:2$

$x = \dfrac{-2}{2}$

$x=-1$

$\underline{x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2(x+1)x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}(x+1)}{x}$

$f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{l} (\frac{1}{2}x \quad +\frac{1}{2} \quad) : (x) = \frac{1}{2} \\ -(\frac{1}{2}x) \\ \hline \qquad\quad \frac{1}{2} \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot x - (\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})\cdot 1}{(x)^2}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}x - (\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})}{(x)^2}$

$= \dfrac{-\frac{1}{2}}{(x)^2}$

$= \dfrac{-\frac{1}{2}}{(x)^2}$

$f''(x) = \frac{0 \cdot x^2 - (-\frac{1}{2}) \cdot 2x}{(x^2)^2}$
$= \frac{0 - (-x)}{(x^2)^2}$
$= \frac{x}{(x^2)^2}$
$= \frac{x}{(x^2)^2}$
$= \frac{x}{x^4}$
$= \frac{1}{x^3}$
$= \frac{1}{x^3}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0$
$\underline{x_4 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-1; 0[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(2 + \frac{2}{x})} = \frac{0,5}{1} = \frac{1}{2}$
Horizontale Asymptote: $y = \frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{2}(x+1)}{x} = \infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{2}(x+1)}{x} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{x^2} = 0$
keine Loesung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-\frac{1}{2}}{x^2}$
Zaehler = 0
keine Loesung

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_5 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{1}{x^3}$

$Zaehler = 0$

keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

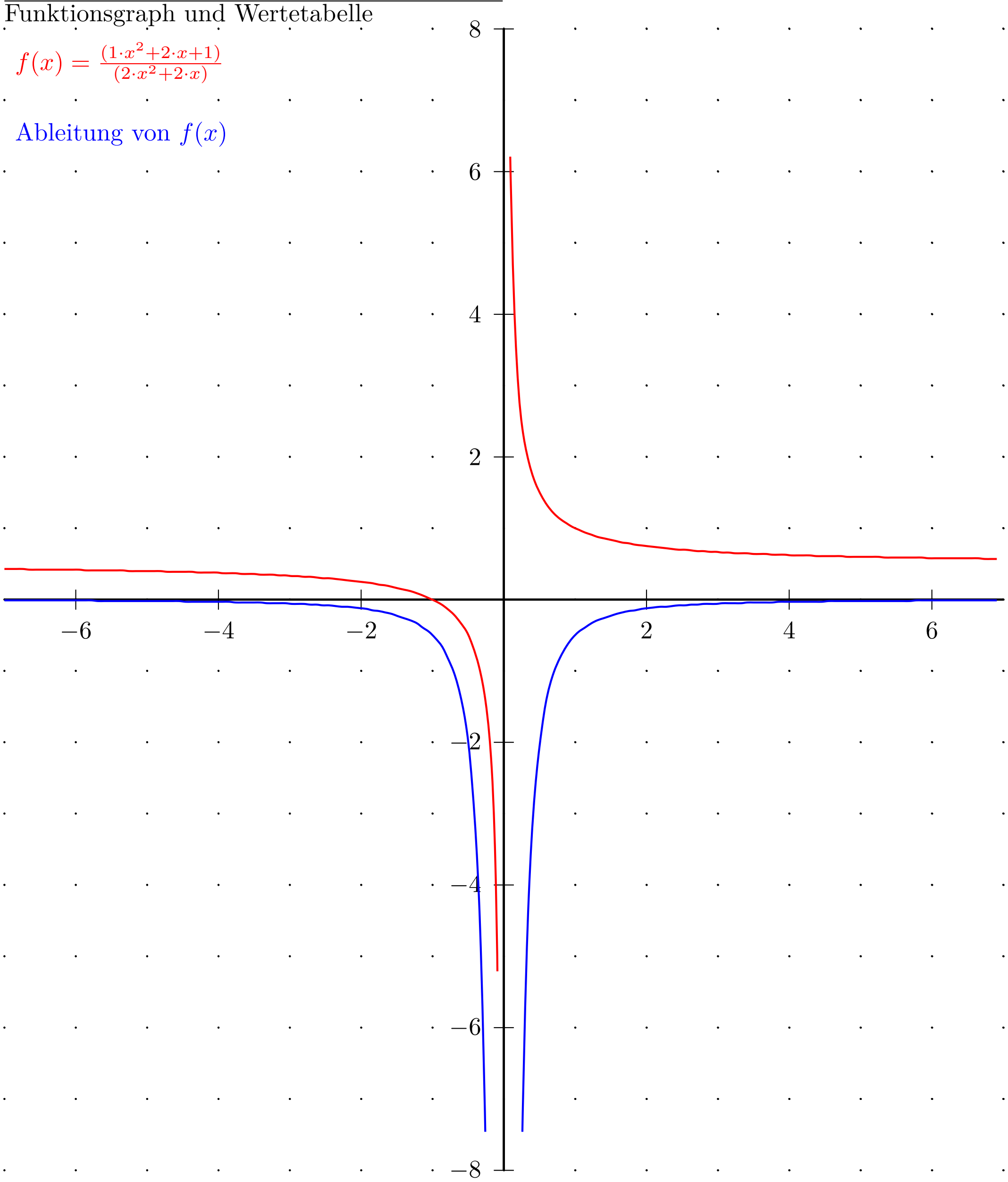
$x_6 = 0; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]0; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-\infty; 0[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{3}{7}$	$-\frac{1}{98}$	$-0,00292$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{11}{26}$	$-0,0118$	$-0,00364$
-6	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{72}$	$-0,00463$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{9}{22}$	$-0,0165$	$-0,00601$
-5	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{50}$	$-0,008$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{7}{18}$	$-\frac{2}{81}$	$-0,011$
-4	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{64}$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{5}{14}$	$-0,0408$	$-0,0233$
-3	$\frac{1}{3}$	$-0,0556$	$-0,037$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$-0,08$	$-0,064$
-2	$\frac{1}{4}$	$-0,125$	$-0,125$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$-0,222$	$-0,296$
-1	NaN	$-0,5$	NaN
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	$-8,01$
0	$+unendlich$	$1632\frac{32}{49}$	$-unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$+unendlich$	$1632\frac{32}{49}$	$-unendlich$
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	-2	$8,01$
1	1	$-0,5$	1
$1\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$-0,222$	$0,296$
2	$\frac{3}{4}$	$-0,125$	$0,125$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$	$-0,08$	$0,064$
3	$\frac{2}{3}$	$-0,0556$	$0,037$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{9}{14}$	$-0,0408$	$0,0233$
4	$\frac{5}{8}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{11}{18}$	$-\frac{2}{81}$	$0,011$
5	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{50}$	$0,008$
$5\frac{1}{2}$	$\frac{13}{22}$	$-0,0165$	$0,00601$
6	$\frac{7}{12}$	$-\frac{1}{72}$	$0,00463$
$6\frac{1}{2}$	$\frac{15}{26}$	$-0,0118$	$0,00364$
7	$\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{98}$	$0,00292$

Aufgabe (9)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2+2x+1=0$

$1x^2+2x+1=0$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-2+0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-2-0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2-4=0$

$1x^2-4=0 \qquad /+4$

$1x^2=4 \qquad /:1$

$x^2 = \dfrac{4}{1}$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_2 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

$f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll} (x^2 & +2x & +1 &) : (x^2-4) = 1 \\ -(x^2 & & -4) & \\ \hline & 2x & +5 & \end{array}$$

$f(x) = 1 + \dfrac{2x+5}{x^2-4}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(2x+2)\cdot(x^2-4)-(x^2+2x+1)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$

$= \dfrac{(2x^3+2x^2-8x-8)-(2x^3+4x^2+2x)}{(x^2-4)^2}$

$= \dfrac{-2x^2-10x-8}{(x^2-4)^2}$

$= \dfrac{-2x^2-10x-8}{(x^2-4)^2}$

$f''(x) = \dfrac{(-4x-10)\cdot(x^4-8x^2+16)-(-2x^2-10x-8)\cdot(4x^3-16x)}{(x^4-8x^2+16)^2}$

$= \frac{(-4x^5 - 10x^4 + 32x^3 + 80x^2 - 64x - 160) - (-8x^5 - 40x^4 + 160x^2 + 128x)}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$
$= \frac{4x^5 + 30x^4 + 32x^3 - 80x^2 - 192x - 160}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$
$= \frac{4x^5 + 30x^4 + 32x^3 - 80x^2 - 192x - 160}{(x^4 - 8x^2 + 16)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x^2 + 2x + 1 = 0$
$\underline{x_4 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-2; -1[\quad \cup \quad]-1; 2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 - \frac{4}{x^2})} = \frac{1}{1} = 1$
Horizontale Asymptote: $y = 1$
$\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$
$\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = \infty$
$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{(x+1)^2}{(x+2)(x-2)} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-2x^2 - 10x - 8}{x^4 - 8x^2 + 16} = 0$

$-2x^2 - 10x - 8 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-8)}}{2 \cdot (-2)}$
$x_{1/2} = \frac{+10 \pm \sqrt{36}}{-4}$
$x_{1/2} = \frac{10 \pm 6}{-4}$
$x_1 = \frac{10 + 6}{-4} \qquad x_2 = \frac{10 - 6}{-4}$
$x_1 = -4 \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_5 = -4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-4) = \frac{1}{24} > 0 \Rightarrow$ $\underline{\text{Tiefpunkt:}(-4/\frac{3}{4})}$
$f''(-1) = -\frac{2}{3}$
$f''(-1) < 0 \Rightarrow$ $\underline{\text{Hochpunkt:}(-1/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{-2x^2 - 10x - 8}{x^4 - 8x^2 + 16}$
Zaehler = 0
$\underline{x_7 = -4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_9 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_10 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-4	$< x <$	-2	$< x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-4; -2[\quad \cup \quad]-2; -1[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; -4[\quad \cup \quad]-1; 2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{4x^5 + 30x^4 + 32x^3 - 80x^2 - 192x - 160}{x^8 - 16x^6 + 96x^4 - 256x^2 + 256}$
$Zaehler = 0$

$NumerischeSuche:$
$\underline{x_11 = -5,7; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_12 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_13 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

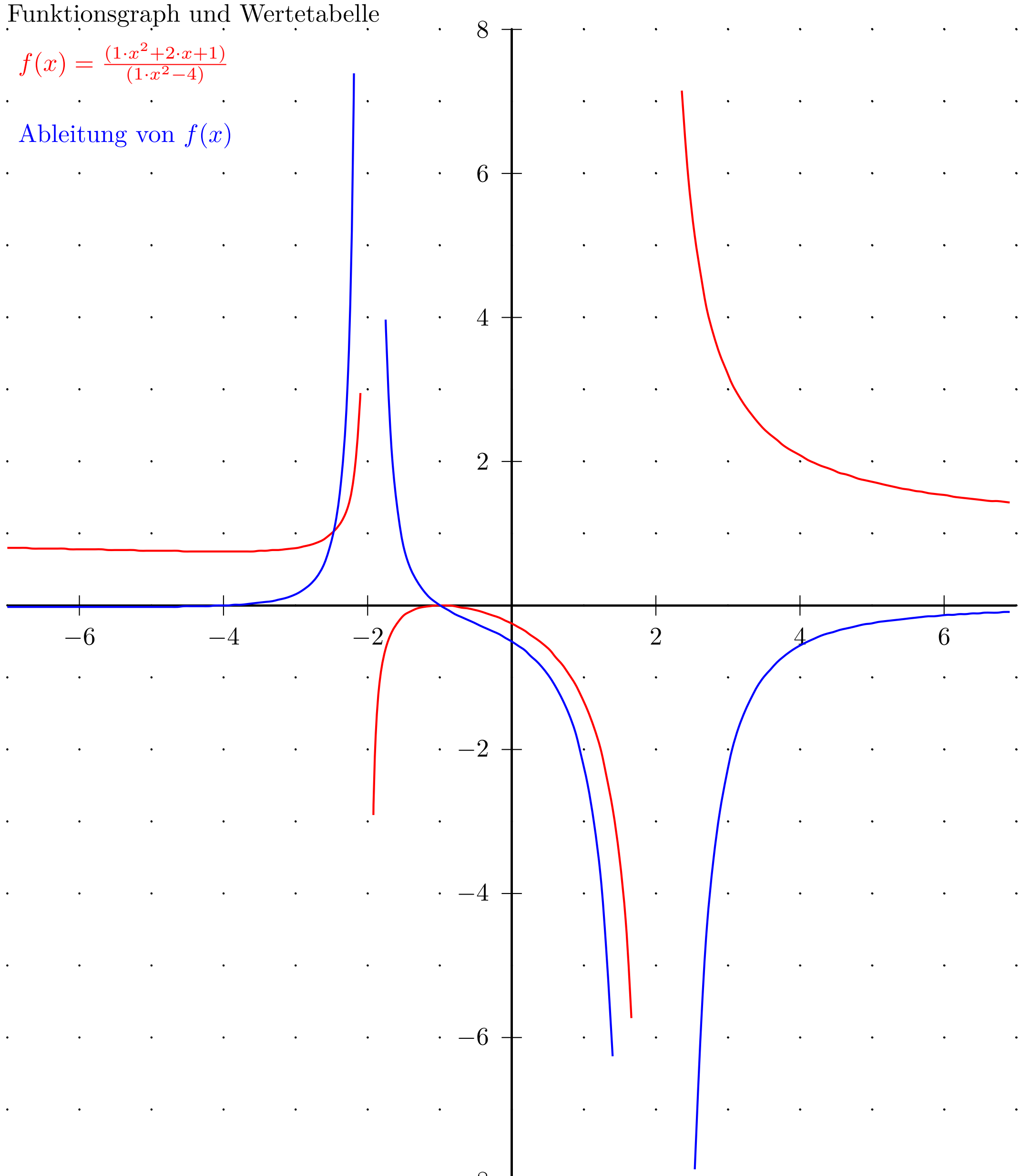
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_14 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_15 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-5,7$	$< x <$	-2	$< x <$	-2	$< x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-5,7; -2[\quad \cup \quad]-2; -2[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; -5,7[\quad \cup \quad]-2; 2[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{4}{5}$	$-0,0178$	$-0,00217$
$-6\frac{1}{2}$	$0,791$	$-0,0188$	$-0,00184$
-6	$\frac{25}{32}$	$-0,0195$	$-0,000976$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{27}{35}$	$-0,0196$	$0,000995$
-5	$\frac{16}{21}$	$-0,0181$	$0,0054$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{49}{65}$	$-0,0133$	$0,0156$
-4	$\frac{3}{4}$	$4,25 \cdot 10^{-6}$	$0,0417$
$-3\frac{1}{2}$	$\frac{25}{33}$	$0,0367$	$0,121$
-3	$\frac{4}{5}$	$0,16$	$0,464$
$-2\frac{1}{2}$	1	$0,89$	$3,96$
-2	$+unendlich$	-816	$-unendlich$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{7}$	$0,818$	$-4,11$
-1	0	$6,81 \cdot 10^{-5}$	$-0,667$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{15}$	$-0,249$	$-0,436$
0	$-\frac{1}{4}$	$-0,5$	$-0,625$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\frac{1}{4}$	$-0,5$	$-0,625$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{5}$	$-0,96$	$-1,37$
1	$-1\frac{1}{3}$	$-2,22$	$-4,52$
$1\frac{1}{2}$	$-3\frac{4}{7}$	$-8,99$	$-36,1$
2	$+unendlich$	$7,35 \cdot 10^{3}$	$-unendlich$
$2\frac{1}{2}$	$5\frac{4}{9}$	-9	36
3	$3\frac{1}{5}$	$-2,24$	$4,5$
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{5}{11}$	$-0,992$	$1,33$
4	$2\frac{1}{12}$	$-0,556$	$0,56$
$4\frac{1}{2}$	$1\frac{56}{65}$	$-0,354$	$0,286$
5	$1\frac{5}{7}$	$-0,245$	$0,165$
$5\frac{1}{2}$	$1,61$	$-0,179$	$0,104$
6	$1\frac{17}{32}$	$-0,137$	$0,0693$
$6\frac{1}{2}$	$1\frac{8}{17}$	$-0,108$	$0,0486$
7	$1\frac{19}{45}$	$-0,0869$	$0,0353$

Aufgabe (10)

•Funktion/Faktorisieren

$$f\left(x\right)=\frac{-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{8}}{-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}}$$

Zaehler faktorisieren:

$$-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{8}=0$$

$$-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{8}=0$$

$$x_{1/2}=\frac{-\frac{2}{5}\pm\sqrt{\frac{2}{5}^2-4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{8}}}{2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$x_{1/2}=\frac{-\frac{2}{5}\pm\sqrt{0,327}}{-\frac{2}{3}}$$

$$x_{1/2}=\frac{-\frac{2}{5}\pm 0,572}{-\frac{2}{3}}$$

$$x_1=\frac{-\frac{2}{5}+0,572}{-\frac{2}{3}} \qquad x_2=\frac{-\frac{2}{5}-0,572}{-\frac{2}{3}}$$

$x_1=-0,257 \qquad x_2=1,46$

$\underline{x_1=-0,257;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2=1,46;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$$-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=0$$

$$-\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=0$$

$$x_{1/2}=\frac{+1\pm\sqrt{\left(-1\right)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$x_{1/2}=\frac{+1\pm\sqrt{0}}{-1}$$

$$x_{1/2}=\frac{1\pm 0}{-1}$$

$$x_1=\frac{1+0}{-1} \qquad x_2=\frac{1-0}{-1}$$

$x_1=-1 \qquad x_2=-1$

$\underline{x_3=-1;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$$f\left(x\right)=\frac{-\frac{1}{3}(x+0,257)(x-1,46)}{-\frac{1}{2}(x+1)^2}$$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$f\left(x\right)=\frac{\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{5}x-\frac{1}{4}}{x^2+2x+1}$$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{llll} (\frac{2}{3}x^2 & -\frac{4}{5}x & -\frac{1}{4} &):(x^2+2x+1)=\frac{2}{3} \\ -(\frac{2}{3}x^2 & +1\frac{1}{3}x & +\frac{2}{3}) & \\ \hline & -2\frac{2}{15}x & -\frac{11}{12} & \end{array}$$

$$f(x)=\frac{2}{3}+\frac{-2\frac{2}{15}x-\frac{11}{12}}{x^2+2x+1}$$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$$f'(x) = \frac{(1\frac{1}{3}x - \frac{4}{5}) \cdot (x^2+2x+1) - (\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{1}{4}) \cdot (2x+2)}{(x^2+2x+1)^2}$$
$$= \frac{(1\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{13}{15}x^2 - \frac{4}{15}x - \frac{4}{5}) - (1\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{15}x^2 - 2\frac{1}{10}x - \frac{1}{2})}{(x^2+2x+1)^2}$$
$$= \frac{2\frac{2}{15}x^2 + 1\frac{5}{6}x - \frac{3}{10}}{(x^2+2x+1)^2}$$
$$= \frac{2\frac{2}{15}x^2 + 1\frac{5}{6}x - \frac{3}{10}}{(x^2+2x+1)^2}$$
$$= \frac{2\frac{2}{15}(x+1)(x-\frac{9}{64})}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{2\frac{2}{15}(x-\frac{9}{64})}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{2\frac{2}{15}x - \frac{3}{10}}{x^3+3x^2+3x+1}$$
$$f''(x) = \frac{2\frac{2}{15} \cdot (x^3+3x^2+3x+1) - (2\frac{2}{15}x - \frac{3}{10}) \cdot (3x^2+6x+3)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$$
$$= \frac{(2\frac{2}{15}x^3 + 6\frac{2}{5}x^2 + 6\frac{2}{5}x + 2\frac{2}{15}) - (6\frac{2}{5}x^3 + 11\frac{9}{10}x^2 + 4\frac{3}{5}x - \frac{9}{10})}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$$
$$= \frac{-4\frac{4}{15}x^3 - 5\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{4}{5}x + 3\frac{1}{30}}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$$
$$= \frac{-4\frac{4}{15}x^3 - 5\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{4}{5}x + 3\frac{1}{30}}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$\frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{1}{4} = 0$

$\underline{x_4 = -0,257; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = 1,46; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	$-0,257$	$< x <$	$1,46$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]-1;-0,257[\quad \cup \quad]1,46;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-0,257;1,46[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(-\frac{1}{3} + \frac{\frac{2}{5}}{x} + \frac{\frac{1}{8}}{x^2})}{x^2(-\frac{1}{2} - \frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{2}}{x^2})} = \frac{0,666666666666667}{1} = \frac{2}{3}$$

Horizontale Asymptote: $y = \frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\frac{2}{3}(x+0,257)(x-1,46)}{(x+1)^2} = \infty$$
$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\frac{2}{3}(x+0,257)(x-1,46)}{(x+1)^2} = \infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \dfrac{2\frac{2}{15}x - \frac{3}{10}}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = 0$

$2\dfrac{2}{15}x - \dfrac{3}{10} = 0 \qquad / + \dfrac{3}{10}$

$2\dfrac{2}{15}x = \dfrac{3}{10} \qquad / : 2\dfrac{2}{15}$

$x = \dfrac{\frac{3}{10}}{2\frac{2}{15}}$

$x = \dfrac{9}{64}$

$\underline{x_6 = \dfrac{9}{64}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(\dfrac{9}{64}) = 1,44 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(\dfrac{9}{64}/ - 0,268)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \dfrac{2\frac{2}{15}x - \frac{3}{10}}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

Zaehler = 0

$\underline{x_7 = \dfrac{9}{64}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_8 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	$\frac{9}{64}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]\dfrac{9}{64}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-1; \dfrac{9}{64}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{-4\frac{4}{15}x^3 - 5\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{4}{5}x + 3\frac{1}{30}}{x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1}$

$Zaehler = 0$

$-4\dfrac{4}{15}x^3 - 5\dfrac{1}{2}x^2 + 1\dfrac{4}{5}x + 3\dfrac{1}{30} = 0$

$NumerischeSuche:$

$\underline{x_9 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_10 = 0,711; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

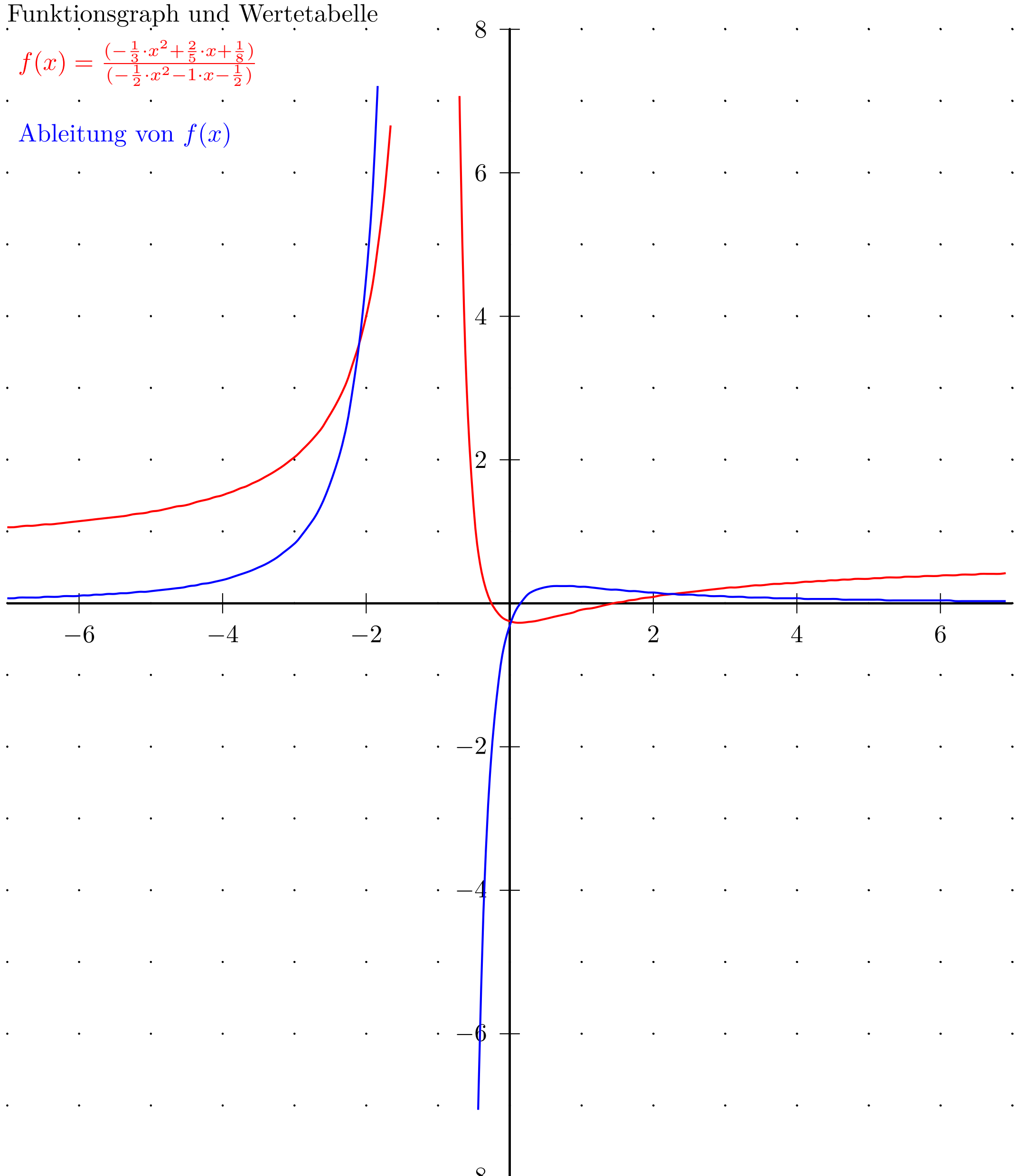
$\underline{x_11 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	-1	$< x <$	$0,711$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; -1[\quad \cup \quad]-1; 0,711[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]0,711; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$1,06$	$0,0705$	$0,0254$
$-6\frac{1}{2}$	$1,09$	$0,0852$	$0,0336$
-6	$1,14$	$0,105$	$0,0458$
$-5\frac{1}{2}$	$1,2$	$0,132$	$0,0646$
-5	$1,28$	$0,171$	$0,0952$
$-4\frac{1}{2}$	$1,38$	$0,231$	$0,148$
-4	$1,51$	$0,327$	$0,248$
$-3\frac{1}{2}$	$1,71$	$0,497$	$0,46$
-3	$2\frac{3}{80}$	$0,838$	$0,99$
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{17}{27}$	$1,67$	$2,71$
-2	$4\frac{1}{60}$	$4,57$	$11,6$
$-1\frac{1}{2}$	$9\frac{4}{5}$	$28,1$	151
-1	$-unendlich$	$-6,97\cdot 10^3$	$+unendlich$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{15}$	-11	$82,9$
0	$-\frac{1}{4}$	$-0,301$	$3,04$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-\frac{1}{4}$	$-0,301$	$3,04$
$\frac{1}{2}$	$-0,215$	$0,227$	$0,178$
1	$-0,0958$	$0,229$	$-0,0771$
$1\frac{1}{2}$	$0,008$	$0,186$	$-0,0862$
2	$0,0907$	$0,147$	$-0,0679$
$2\frac{1}{2}$	$0,156$	$0,117$	$-0,0509$
3	$0,209$	$0,0953$	$-0,0382$
$3\frac{1}{2}$	$0,253$	$0,0786$	$-0,029$
4	$0,289$	$0,0659$	$-0,0225$
$4\frac{1}{2}$	$0,319$	$0,0559$	$-0,0177$
5	$0,345$	$0,048$	$-0,0141$
$5\frac{1}{2}$	$0,367$	$0,0416$	$-0,0114$
6	$0,387$	$0,0364$	$-0,0094$
$6\frac{1}{2}$	$0,404$	$0,0322$	$-0,00781$
7	$0,419$	$0,0286$	$-0,00655$

Aufgabe (11)

•Funktion/Faktorisieren

$f\left(x\right)=\dfrac{x^2-5x-27}{x^2+3x}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2-5x-27=0$

$1x^2-5x-27=0$

$x_{1/2}=\dfrac{+5\pm\sqrt{\left(-5\right)^2-4\cdot1\cdot(-27)}}{2\cdot1}$

$x_{1/2}=\dfrac{+5\pm\sqrt{133}}{2}$

$x_{1/2}=\dfrac{5\pm11,5}{2}$

$x_1=\dfrac{5+11,5}{2}\qquad x_2=\dfrac{5-11,5}{2}$

$x_1=8,27\qquad x_2=-3,27$

$\underline{x_1=-3,27;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2=8,27;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2+3x=0$

$x(x+3)=0\Rightarrow x=0\quad\wedge\quad x+3=0$

$x+3=0\qquad /-3$

$x=-3$

$\underline{x_3=-3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_4=0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f\left(x\right)=\dfrac{(x+3,27)(x-8,27)}{(x+3)x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-3;0\}$

$f\left(x\right)=\dfrac{x^2-5x-27}{x^2+3x}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll} (x^2 & -5x & -27 &):(x^2+3x)=1 \\ -(x^2 & +3x) & & \\ \hline & -8x & -27 & \end{array}$$

$f(x)=1+\dfrac{-8x-27}{x^2+3x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'\left(x\right)=\dfrac{(2x-5)\cdot(x^2+3x)-(x^2-5x-27)\cdot(2x+3)}{(x^2+3x)^2}$

$=\dfrac{(2x^3+x^2-15x)-(2x^3-7x^2-69x-81)}{(x^2+3x)^2}$

$=\dfrac{8x^2+54x+81}{(x^2+3x)^2}$

$=\dfrac{8x^2+54x+81}{(x^2+3x)^2}$

$f''\left(x\right)=\dfrac{(16x+54)\cdot(x^4+6x^3+9x^2)-(8x^2+54x+81)\cdot(4x^3+18x^2+18x)}{(x^4+6x^3+9x^2)^2}$

$=\dfrac{(16x^5+150x^4+468x^3+486x^2)-(32x^5+360x^4+1,44\cdot10^3x^3+2,43\cdot10^3x^2+1,46\cdot10^3x)}{(x^4+6x^3+9x^2)^2}$

$$= \frac{-16x^5 - 210x^4 - 972x^3 - 1,94 \cdot 10^3 x^2 - 1,46 \cdot 10^3 x}{(x^4 + 6x^3 + 9x^2)^2}$$
$$= \frac{-16x^5 - 210x^4 - 972x^3 - 1,94 \cdot 10^3 x^2 - 1,46 \cdot 10^3 x}{(x^4 + 6x^3 + 9x^2)^2}$$
$$= \frac{-16(x^2 + 4,35x + 5,26)(x + 5,78)(x + 3)x}{(x + 3)^4 x^4}$$
$$= \frac{-16(x^2 + 4,35x + 5,26)(x + 5,78)}{(x + 3)^3 x^3}$$
$$= \frac{-16x^3 - 162x^2 - 486x - 486}{x^6 + 9x^5 + 27x^4 + 27x^3}$$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x^2 - 5x - 27 = 0$
$\underline{x_5 = -3,27; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 8,27; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-3,27$	$< x <$	-3	$< x <$	0	$< x <$	$8,27$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -3,27[\quad \cup \quad]-3; 0[\quad \cup \quad]8,27; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-3,27; -3[\quad \cup \quad]0; 8,27[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2(1 - \frac{5}{x} - \frac{27}{x^2})}{x^2(1 + \frac{3}{x})} = \frac{1}{1} = 1$$
Horizontale Asymptote: $y = 1$
$$\lim_{x \to -3^+} \frac{(x + 3,27)(x - 8,27)}{(x + 3)x} = \infty$$
$$\lim_{x \to -3^-} \frac{(x + 3,27)(x - 8,27)}{(x + 3)x} = -\infty$$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -3$
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(x + 3,27)(x - 8,27)}{(x + 3)x} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{(x + 3,27)(x - 8,27)}{(x + 3)x} = \infty$$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$$f'(x) = \frac{8x^2 + 54x + 81}{x^4 + 6x^3 + 9x^2} = 0$$

$8x^2 + 54x + 81 = 0$
$$x_{1/2} = \frac{-54 \pm \sqrt{54^2 - 4 \cdot 8 \cdot 81}}{2 \cdot 8}$$
$$x_{1/2} = \frac{-54 \pm \sqrt{324}}{16}$$
$$x_{1/2} = \frac{-54 \pm 18}{16}$$

$x_1 = \frac{-54+18}{16} \qquad x_2 = \frac{-54-18}{16}$
$x_1 = -2\frac{1}{4} \qquad x_2 = -4\frac{1}{2}$
$\underline{x_7 = -4\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = -2\frac{1}{4}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-4\frac{1}{2}) = -\frac{32}{81}$
$f''(-4\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-4\frac{1}{2}/2\frac{1}{3})}$
$f''(-2\frac{1}{4}) = 6\frac{26}{81} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-2\frac{1}{4}/6\frac{1}{3})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{8x^2+54x+81}{x^4+6x^3+9x^2}$
Zaehler = 0
$\underline{x_9 = -4\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_10 = -2\frac{1}{4}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_11 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_12 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-4\frac{1}{2}$	$< x <$	-3	$< x <$	$-2\frac{1}{4}$	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-2\frac{1}{4};0[\quad \cup \quad]0;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-4\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]-4\frac{1}{2};-3[\quad \cup \quad]-3;-2\frac{1}{4}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{-16x^3-162x^2-486x-486}{x^6+9x^5+27x^4+27x^3}$
$Zaehler = 0$

$-16x^3 - 162x^2 - 486x - 486 = 0$
$NumerischeSuche:$
$\underline{x_13 = -5,78; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

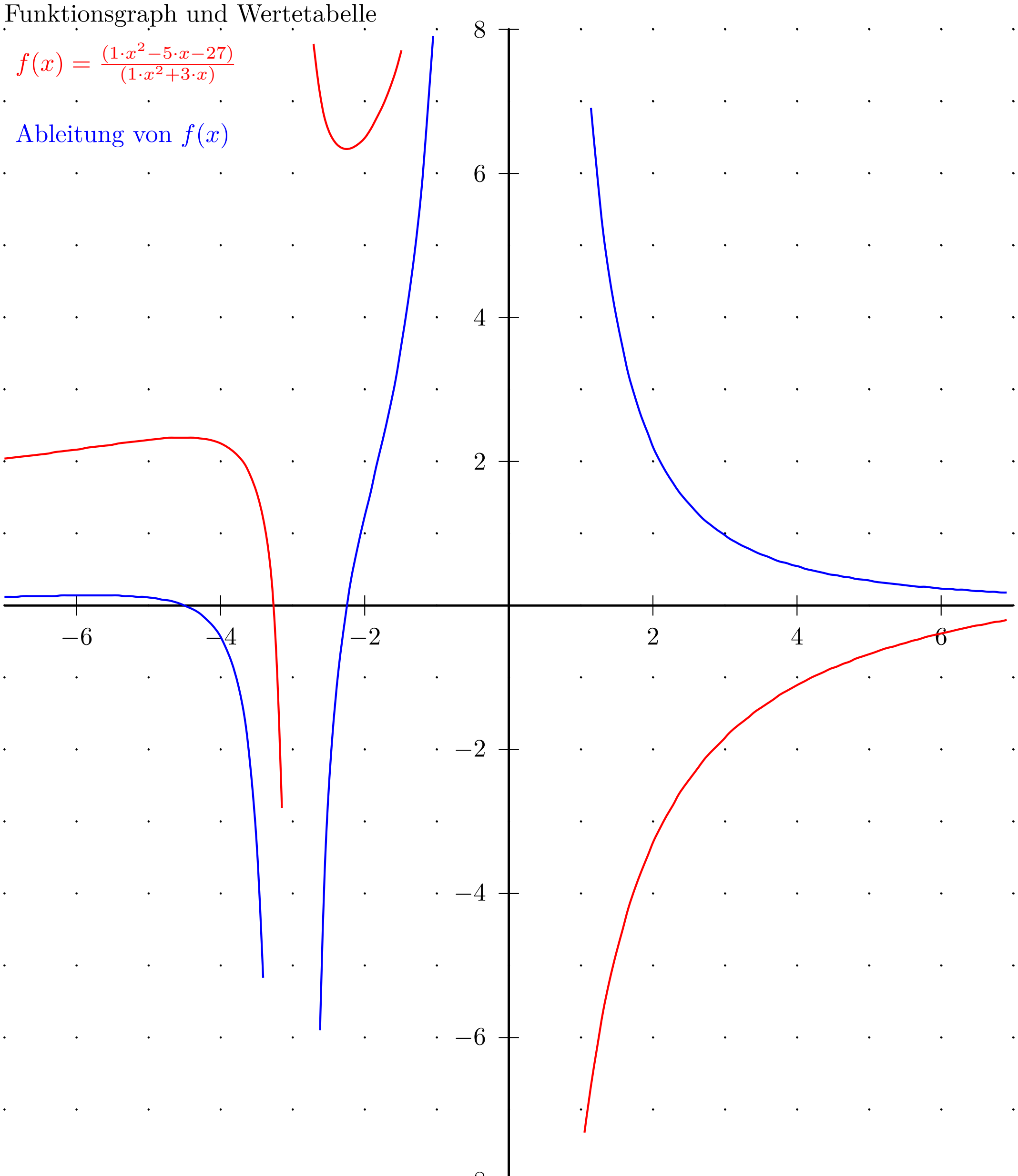
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_14 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_15 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-5,78$	$< x <$	-3	$< x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-5,78[\quad \cup \quad]-3;0[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]-5,78;-3[\quad \cup \quad]0;\infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$2\frac{1}{28}$	$0,121$	$0,0212$
$-6\frac{1}{2}$	$2\frac{9}{91}$	$0,131$	$0,0189$
-6	$2\frac{1}{6}$	$0,139$	$0,00926$
$-5\frac{1}{2}$	$2\frac{13}{55}$	$0,138$	$-0,0198$
-5	$2\frac{3}{10}$	$0,11$	$-0,106$
$-4\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{3}$	$-5,38 \cdot 10^{-5}$	$-0,395$
-4	$2\frac{1}{4}$	$-0,438$	$-1,72$
$-3\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{7}$	$-3,27$	$-15,6$
-3	$-unendlich$	$3,27 \cdot 10^{3}$	$+unendlich$
$-2\frac{1}{2}$	$6\frac{3}{5}$	$-2,56$	$17,2$
-2	$6\frac{1}{2}$	$1,25$	$4,25$
$-1\frac{1}{2}$	$7\frac{2}{3}$	$3,56$	$5,93$
-1	$10\frac{1}{2}$	$8,75$	$18,3$
$-\frac{1}{2}$	$19\frac{2}{5}$	$35,9$	144
0	$-unendlich$	$-2,94 \cdot 10^{4}$	$+unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-unendlich$	$-2,94 \cdot 10^{4}$	$+unendlich$
$\frac{1}{2}$	$-16\frac{5}{7}$	36	-144
1	$-7\frac{3}{4}$	$8,94$	-18
$1\frac{1}{2}$	$-4\frac{7}{9}$	$3,95$	$-5,31$
2	$-3\frac{3}{10}$	$2,21$	$-2,23$
$2\frac{1}{2}$	$-2\frac{23}{55}$	$1,41$	$-1,14$
3	$-1\frac{5}{6}$	$0,972$	$-0,657$
$3\frac{1}{2}$	$-1\frac{38}{91}$	$0,711$	$-0,413$
4	$-1\frac{3}{28}$	$0,542$	$-0,275$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{15}$	$0,427$	$-0,193$
5	$-\frac{27}{40}$	$0,344$	$-0,14$
$5\frac{1}{2}$	$-0,519$	$0,284$	$-0,105$
6	$-\frac{7}{18}$	$0,238$	$-0,0806$
$6\frac{1}{2}$	$-0,279$	$0,202$	$-0,0632$
7	$-\frac{13}{70}$	$0,174$	$-0,0505$

Aufgabe (12)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{4x^2 + 12x + 5}{-2x^2 + 1}$

Zaehler faktorisieren:

$4x^2 + 12x + 5 = 0$

$4x^2 + 12x + 5 = 0$

$x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{2 \cdot 4}$

$x_{1/2} = \frac{-12 \pm \sqrt{64}}{8}$

$x_{1/2} = \frac{-12 \pm 8}{8}$

$x_1 = \frac{-12 + 8}{8} \qquad x_2 = \frac{-12 - 8}{8}$

$x_1 = -\frac{1}{2} \qquad x_2 = -2\frac{1}{2}$

$\underline{x_1 = -2\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = -\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$-2x^2 + 1 = 0$

$-2x^2 + 1 = 0 \qquad / - 1$

$-2x^2 = -1 \qquad / : (-2)$

$x^2 = \frac{-1}{-2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$x_1 = 0,707 \qquad x_2 = -0,707$

$\underline{x_3 = -0,707; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_4 = 0,707; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{4(x + 2\frac{1}{2})(x + \frac{1}{2})}{-2(x + 0,707)(x - 0,707)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-0,707; 0,707\}$

$f(x) = \frac{-2x^2 - 6x - 2\frac{1}{2}}{x^2 - \frac{1}{2}}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll} (-2x^2 & -6x & -2\frac{1}{2} &) : (x^2 - \frac{1}{2}) = -2 \\ -(-2x^2 & & +1) & \\ \hline & -6x & -3\frac{1}{2} & \end{array}$$

$f(x) = -2 + \frac{-6x - 3\frac{1}{2}}{x^2 - \frac{1}{2}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{(-4x - 6) \cdot (x^2 - \frac{1}{2}) - (-2x^2 - 6x - 2\frac{1}{2}) \cdot 2x}{(x^2 - \frac{1}{2})^2}$

$= \frac{(-4x^3 - 6x^2 + 2x + 3) - (-4x^3 - 12x^2 - 5x)}{(x^2 - \frac{1}{2})^2}$

$= \frac{6x^2+7x+3}{(x^2-\frac{1}{2})^2}$
$= \frac{6x^2+7x+3}{(x^2-\frac{1}{2})^2}$
$f''(x) = \frac{(12x+7)\cdot(x^4-x^2+\frac{1}{4})-(6x^2+7x+3)\cdot(4x^3-2x)}{(x^4-x^2+\frac{1}{4})^2}$
$= \frac{(12x^5+7x^4-12x^3-7x^2+3x+1\frac{3}{4})-(24x^5+28x^4-14x^2-6x)}{(x^4-x^2+\frac{1}{4})^2}$
$= \frac{-12x^5-21x^4-12x^3+7x^2+9x+1\frac{3}{4}}{(x^4-x^2+\frac{1}{4})^2}$
$= \frac{-12x^5-21x^4-12x^3+7x^2+9x+1\frac{3}{4}}{(x^4-x^2+\frac{1}{4})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-2x^2-6x-2\frac{1}{2}=0$
$\underline{x_5 = -2\frac{1}{2};\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = -\frac{1}{2};\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-2\frac{1}{2}$	$< x <$	$-0,707$	$< x <$	$-\frac{1}{2}$	$< x <$	$0,707$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-2\frac{1}{2};-0,707[\quad \cup \quad]-\frac{1}{2};0,707[\quad f(x)>0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$
$\underline{x \in]-\infty;-2\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]-0,707;-\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]0,707;\infty[\quad f(x)<0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(4+\frac{12}{x}+\frac{5}{x^2})}{x^2(-2+\frac{1}{x^2})} = \frac{-2}{1} = -2$
Horizontale Asymptote: $y=-2$
$\lim\limits_{x\to-0,707^+} \frac{-2(x+2\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{(x+0,707)(x-0,707)} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-0,707^-} \frac{-2(x+2\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{(x+0,707)(x-0,707)} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x=-0,707$
$\lim\limits_{x\to0,707^+} \frac{-2(x+2\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{(x+0,707)(x-0,707)} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to0,707^-} \frac{-2(x+2\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{(x+0,707)(x-0,707)} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x=0,707$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{6x^2+7x+3}{x^4-x^2+\frac{1}{4}} = 0$
$6x^2+7x+3=0$
$x_{1/2} = \frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot6\cdot3}}{2\cdot6}$

$x_{1/2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{-23}}{12}$
Diskriminante negativ keine Lösung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \dfrac{6x^2 + 7x + 3}{x^4 - x^2 + \frac{1}{4}}$
Zaehler = 0

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_7 = -0,707;$ 1-fache Nullstelle
$x_8 = 0,707;$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$-0,707$	$< x <$	$0,707$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

$x \in]-0,707; 0,707[\quad \cup \quad]0,707; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty; -0,707[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung
$f''(x) = \dfrac{-12x^5 - 21x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 9x + 1\frac{3}{4}}{x^8 - 2x^6 + 1\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}}$
$Zaehler = 0$

$NumerischeSuche:$
$x_9 = -0,707;$ 1-fache Nullstelle
$x_10 = -0,263;$ 1-fache Nullstelle
$x_11 = 0,707;$ 1-fache Nullstelle

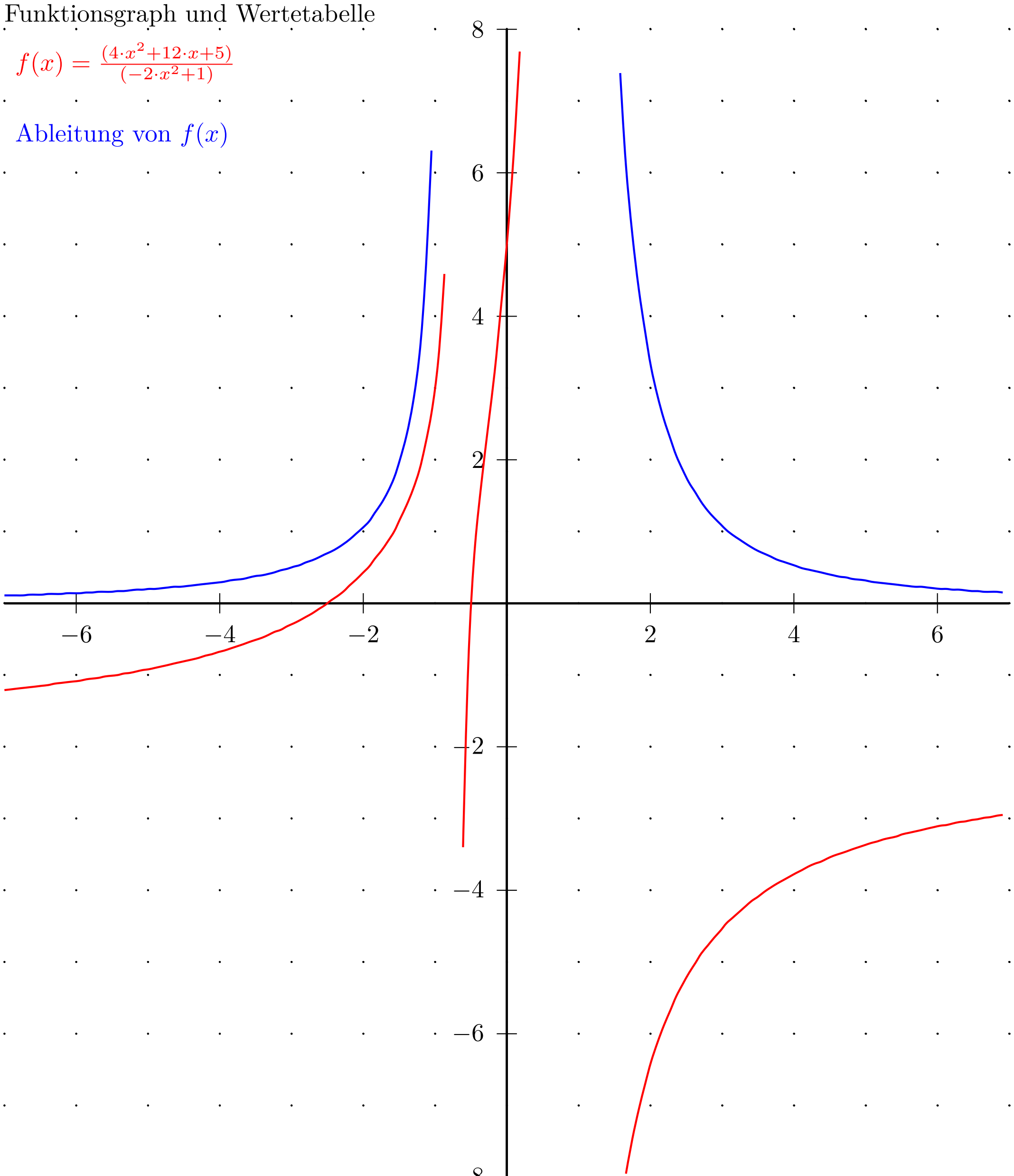
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_12 = -0,707;$ 1-fache Nullstelle
$x_13 = 0,707;$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$-0,707$	$< x <$	$-0,707$	$< x <$	$-0,263$	$< x <$	$0,707$	$< x <$	$0,707$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -0,707[\quad \cup \quad]-0,707; -0,707[\quad \cup \quad]-0,263; 0,707[\quad \cup \quad]0,707; 0,707[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-0,707; -0,263[\quad \cup \quad]0,707; \infty[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-1\frac{20}{97}$	$0,105$	$0,0281$
$-6\frac{1}{2}$	$-1,15$	$0,121$	$0,0347$
-6	$-1\frac{6}{71}$	$0,14$	$0,0434$
$-5\frac{1}{2}$	$-1,01$	$0,165$	$0,0553$
-5	$-\frac{45}{49}$	$0,197$	$0,0722$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{64}{79}$	$0,238$	$0,0968$
-4	$-\frac{21}{31}$	$0,296$	$0,134$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{24}{47}$	$0,377$	$0,195$
-3	$-\frac{5}{17}$	$0,498$	$0,302$
$-2\frac{1}{2}$	0	$0,696$	$0,514$
-2	$\frac{3}{7}$	$1,06$	$1,04$
$-1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{7}$	$1,96$	$3,13$
-1	3	$8,02$	$44,1$
$-\frac{1}{2}$	0	$16,1$	-113
0	5	12	28

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	5	12	28
$\frac{1}{2}$	24	129	$1,24 \cdot 10^3$
1	-21	$64,2$	-438
$1\frac{1}{2}$	$-9\frac{1}{7}$	$8,82$	$-22,1$
2	$-6\frac{3}{7}$	$3,35$	$-5,12$
$2\frac{1}{2}$	$-5\frac{5}{23}$	$1,75$	$-1,93$
3	$-4\frac{9}{17}$	$1,08$	$-0,929$
$3\frac{1}{2}$	$-4\frac{4}{47}$	$0,732$	$-0,517$
4	$-3\frac{24}{31}$	$0,529$	$-0,317$
$4\frac{1}{2}$	$-3\frac{43}{79}$	$0,4$	$-0,208$
5	$-3\frac{18}{49}$	$0,313$	$-0,144$
$5\frac{1}{2}$	$-3,23$	$0,252$	$-0,104$
6	$-3\frac{8}{71}$	$0,207$	$-0,0773$
$6\frac{1}{2}$	$-3,02$	$0,173$	$-0,0591$
7	$-2\frac{91}{97}$	$0,147$	$-0,0462$

Aufgabe (13)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

Zaehler faktorisieren:

$5x^2 - 2x + 1 = 0$

$5x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5}$

$x_{1/2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{-16}}{10}$

Diskriminante negativ keine Lösung

Nenner faktorisieren:

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$1x^2 + 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-2 + 0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-2 - 0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{5(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5})}{(x+1)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll}
(5x^2 & -2x & +1 &) : (x^2 + 2x + 1) = 5 \\
-(5x^2 & +10x & +5) & \\
\hline
 & -12x & -4 &
\end{array}$$

$f(x) = 5 + \dfrac{-12x - 4}{x^2 + 2x + 1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(10x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 1) - (5x^2 - 2x + 1) \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{(10x^3 + 18x^2 + 6x - 2) - (10x^3 + 6x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{12x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{12x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{12(x+1)(x - \frac{1}{3})}{(x+1)^4}$

$= \dfrac{12(x - \frac{1}{3})}{(x+1)^3}$

$= \frac{12x-4}{x^3+3x^2+3x+1}$

$f''(x) = \frac{12 \cdot (x^3+3x^2+3x+1) - (12x-4) \cdot (3x^2+6x+3)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$= \frac{(12x^3+36x^2+36x+12) - (36x^3+60x^2+12x-12)}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$= \frac{-24x^3-24x^2+24x+24}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

$= \frac{-24x^3-24x^2+24x+24}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$5x^2 - 2x + 1 = 0$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(5-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{5}{1} = 5$

Horizontale Asymptote: $y = 5$

$\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{5(x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5})}{(x+1)^2} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{5(x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5})}{(x+1)^2} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{12x-4}{x^3+3x^2+3x+1} = 0$

$12x - 4 = 0 \qquad / + 4$

$12x = 4 \qquad / : 12$

$x = \frac{4}{12}$

$x = \frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{1}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

$f''(\frac{1}{3}) = 5\frac{1}{16} > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(\frac{1}{3}/\frac{1}{2})$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{12x-4}{x^3+3x^2+3x+1}$

Zaehler $= 0$

$x_3 = \frac{1}{3}; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_4 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]\frac{1}{3}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-1; \frac{1}{3}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{-24x^3 - 24x^2 + 24x + 24}{x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1}$

$Zaehler = 0$

$-24x^3 - 24x^2 + 24x + 24 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$
\begin{array}{llllll}
(-24x^3 & -24x^2 & +24x & +24 &) : (x-1) = -24x^2 - 48x - 24 \\
-(-24x^3 & +24x^2) & & & \\
\hline
 & -48x^2 & +24x & +24 & \\
 & -(-48x^2 & +48x) & & \\
\hline
 & & -24x & +24 & \\
 & & -(-24x & +24) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$-24x^2 - 48x - 24 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+48 \pm \sqrt{(-48)^2 - 4 \cdot (-24) \cdot (-24)}}{2 \cdot (-24)}$

$x_{1/2} = \dfrac{+48 \pm \sqrt{0}}{-48}$

$x_{1/2} = \dfrac{48 \pm 0}{-48}$

$x_1 = \dfrac{48 + 0}{-48} \qquad x_2 = \dfrac{48 - 0}{-48}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_5 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_6 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

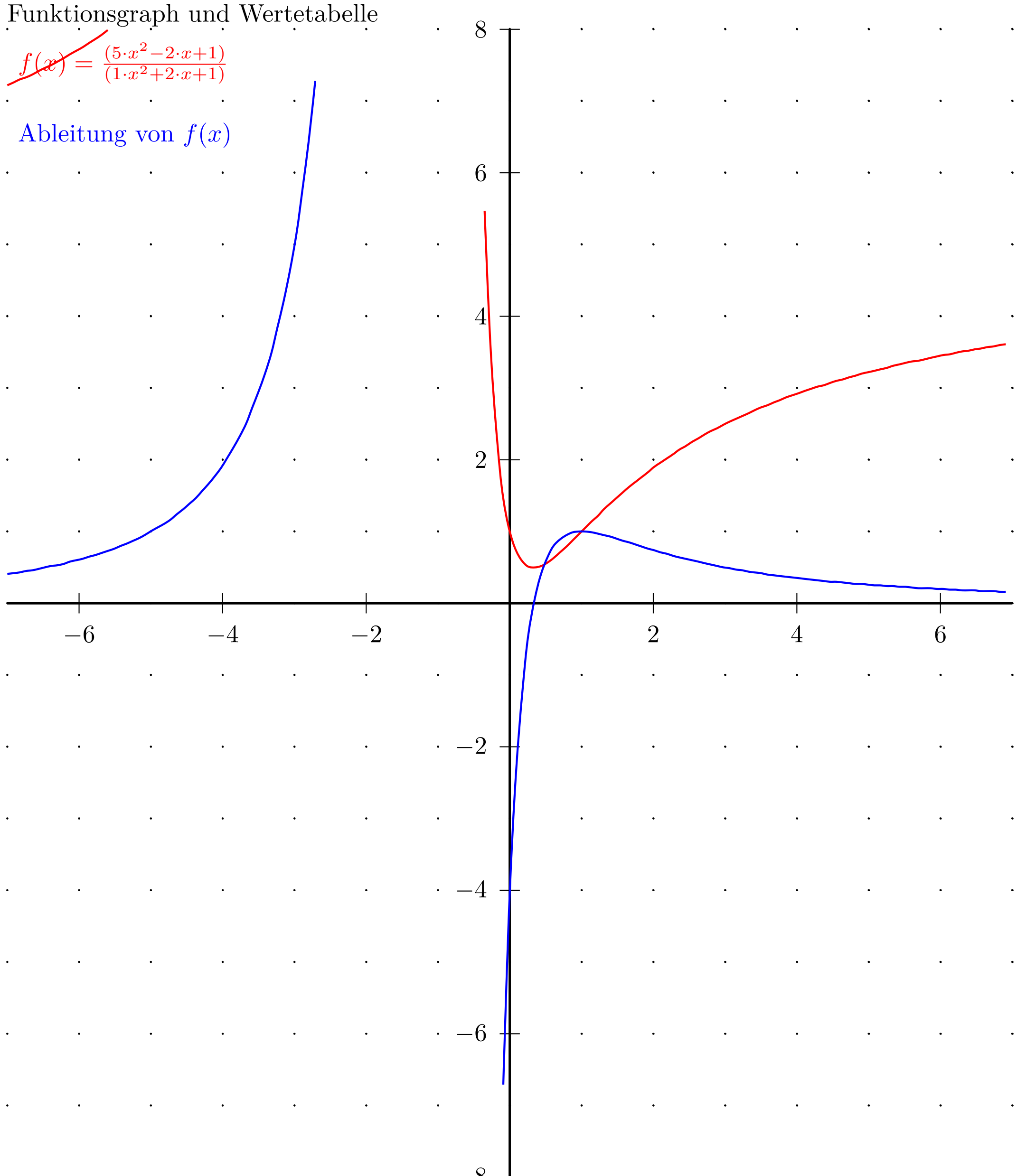
$\underline{x_7 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; 1[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]1; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$7\frac{2}{9}$	$0,407$	$0,148$
$-6\frac{1}{2}$	$7,45$	$0,493$	$0,197$
-6	$7\frac{18}{25}$	$0,608$	$0,269$
$-5\frac{1}{2}$	$8\frac{5}{81}$	$0,768$	$0,38$
-5	$8\frac{1}{2}$	1	$0,563$
$-4\frac{1}{2}$	$9\frac{4}{49}$	$1,35$	$0,88$
-4	$9\frac{8}{9}$	$1,93$	$1,48$
$-3\frac{1}{2}$	$11\frac{2}{25}$	$2,94$	$2,76$
-3	13	5	6
$-2\frac{1}{2}$	$16\frac{5}{9}$	$10,1$	$16,6$
-2	25	28	72
$-1\frac{1}{2}$	61	176	962
-1	$+unendlich$	$-39183\frac{33}{49}$	$-unendlich$
$-\frac{1}{2}$	13	$-80,3$	577
0	1	$-4,01$	24

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	$-4,01$	24
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$	$0,592$	$2,37$
1	1	1	$0,000153$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{12}{25}$	$0,896$	$-0,307$
2	$1\frac{8}{9}$	$0,741$	$-0,296$
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{11}{49}$	$0,606$	$-0,24$
3	$2\frac{1}{2}$	$0,5$	$-0,188$
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{59}{81}$	$0,417$	$-0,146$
4	$2\frac{23}{25}$	$0,352$	$-0,115$
$4\frac{1}{2}$	$3,08$	$0,301$	$-0,0918$
5	$3\frac{2}{9}$	$0,259$	$-\frac{2}{27}$
$5\frac{1}{2}$	$3,34$	$0,226$	$-0,0605$
6	$3\frac{22}{49}$	$0,198$	$-0,05$
$6\frac{1}{2}$	$3,54$	$0,175$	$-0,0417$
7	$3\frac{5}{8}$	$\frac{5}{32}$	$-0,0352$

Aufgabe (14)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

Zaehler faktorisieren:

$5x^2 - 2x + 1 = 0$

$5x^2 - 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5}$

$x_{1/2} = \dfrac{+2 \pm \sqrt{-16}}{10}$

Diskriminante negativ keine Lösung

Nenner faktorisieren:

$x^2 + 2x + 1 = 0$

$1x^2 + 2x + 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-2 + 0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-2 - 0}{2}$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{5(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5})}{(x+1)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll} (5x^2 & -2x & +1 &) : (x^2 + 2x + 1) = 5 \\ -(5x^2 & +10x & +5) & \\ \hline & -12x & -4 & \end{array}$$

$f(x) = 5 + \dfrac{-12x - 4}{x^2 + 2x + 1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(10x - 2) \cdot (x^2 + 2x + 1) - (5x^2 - 2x + 1) \cdot (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{(10x^3 + 18x^2 + 6x - 2) - (10x^3 + 6x^2 - 2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{12x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{12x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

$= \dfrac{12(x + 1)(x - \frac{1}{3})}{(x + 1)^4}$

$= \dfrac{12(x - \frac{1}{3})}{(x + 1)^3}$

$= \dfrac{12x - 4}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

$f''(x) = \dfrac{12 \cdot (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (12x - 4) \cdot (3x^2 + 6x + 3)}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

$= \dfrac{(12x^3 + 36x^2 + 36x + 12) - (36x^3 + 60x^2 + 12x - 12)}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

$= \dfrac{-24x^3 - 24x^2 + 24x + 24}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

$= \dfrac{-24x^3 - 24x^2 + 24x + 24}{(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$5x^2 - 2x + 1 = 0$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2(5 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})} = \dfrac{5}{1} = 5$

Horizontale Asymptote: $y = 5$

$\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{5(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5})}{(x + 1)^2} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{5(x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{5})}{(x + 1)^2} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -1$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \dfrac{12x - 4}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = 0$

$12x - 4 = 0 \qquad / + 4$

$12x = 4 \qquad / : 12$

$x = \dfrac{4}{12}$

$x = \dfrac{1}{3}$

$x_2 = \dfrac{1}{3}$; 1-fache Nullstelle

$f''(\frac{1}{3}) = 5\frac{1}{16} > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(\frac{1}{3}/\frac{1}{2})$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \dfrac{12x - 4}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

Zaehler $= 0$

$x_3 = \dfrac{1}{3}$; 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_4 = -1$; 2-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]\frac{1}{3}; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-1; \frac{1}{3}[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{-24x^3 - 24x^2 + 24x + 24}{x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1}$$

$Zaehler = 0$

$-24x^3 - 24x^2 + 24x + 24 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{llll}
(-24x^3 & -24x^2 & +24x & +24 \quad) : (x-1) = -24x^2 - 48x - 24 \\
-(-24x^3 & +24x^2) & & \\
\hline
 & -48x^2 & +24x & +24 \\
 & -(-48x^2 & +48x) & \\
\hline
 & & -24x & +24 \\
 & & -(-24x & +24) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$-24x^2 - 48x - 24 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+48 \pm \sqrt{(-48)^2 - 4 \cdot (-24) \cdot (-24)}}{2 \cdot (-24)}$$

$$x_{1/2} = \frac{+48 \pm \sqrt{0}}{-48}$$

$$x_{1/2} = \frac{48 \pm 0}{-48}$$

$$x_1 = \frac{48 + 0}{-48} \qquad x_2 = \frac{48 - 0}{-48}$$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -1$

$x_5 = -1$; 2-fache Nullstelle

$x_6 = 1$; 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

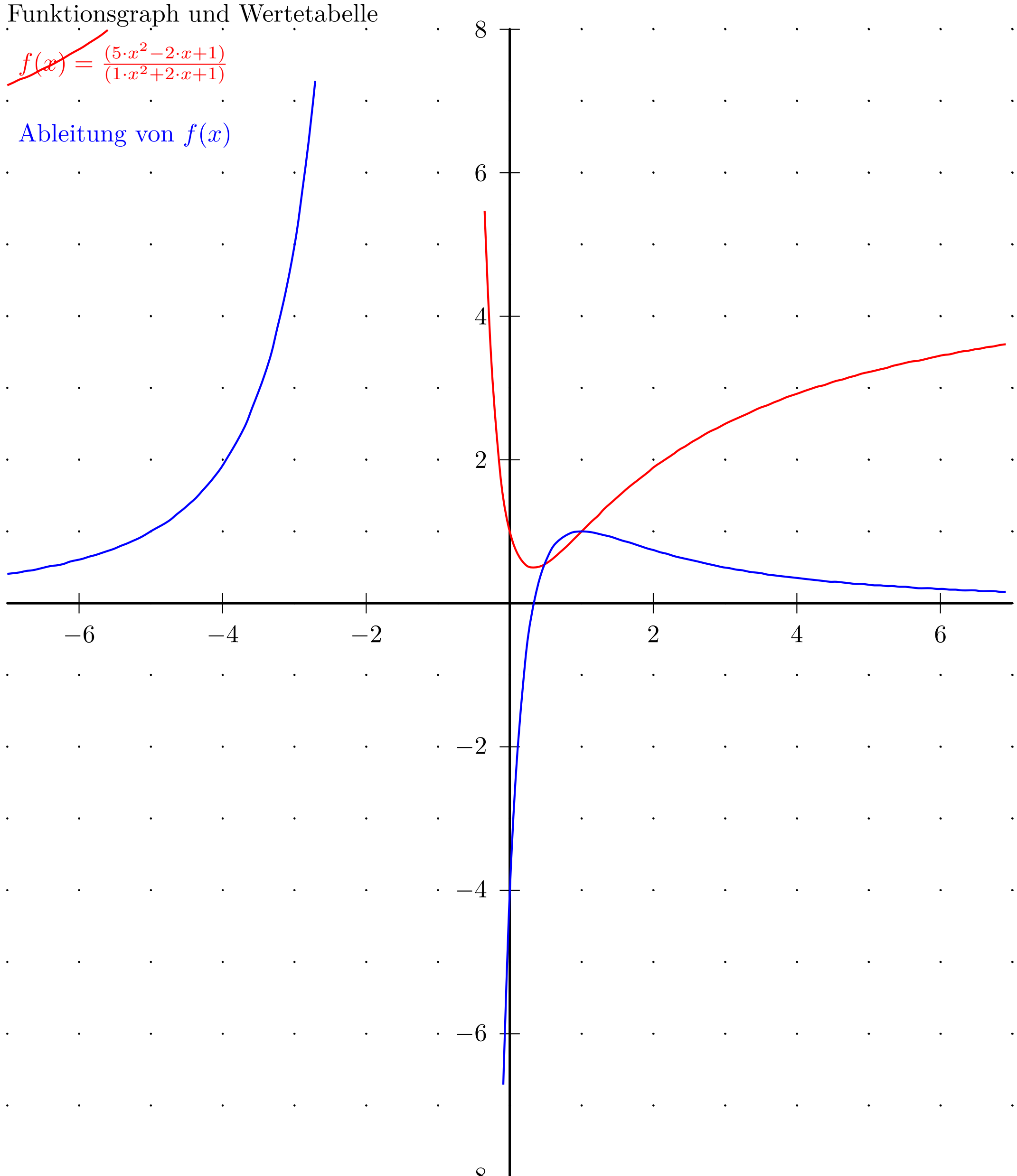
$x_7 = -1$; 2-fache Nullstelle

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]-1; 1[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]1; \infty[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$7\frac{2}{9}$	$0,407$	$0,148$
$-6\frac{1}{2}$	$7,45$	$0,493$	$0,197$
-6	$7\frac{18}{25}$	$0,608$	$0,269$
$-5\frac{1}{2}$	$8\frac{5}{81}$	$0,768$	$0,38$
-5	$8\frac{1}{2}$	1	$0,563$
$-4\frac{1}{2}$	$9\frac{4}{49}$	$1,35$	$0,88$
-4	$9\frac{8}{9}$	$1,93$	$1,48$
$-3\frac{1}{2}$	$11\frac{2}{25}$	$2,94$	$2,76$
-3	13	5	6
$-2\frac{1}{2}$	$16\frac{5}{9}$	$10,1$	$16,6$
-2	25	28	72
$-1\frac{1}{2}$	61	176	962
-1	$+unendlich$	$-39183\frac{33}{49}$	$-unendlich$
$-\frac{1}{2}$	13	$-80,3$	577
0	1	$-4,01$	24

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	$-4,01$	24
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{9}$	$0,592$	$2,37$
1	1	1	$0,000153$
$1\frac{1}{2}$	$1\frac{12}{25}$	$0,896$	$-0,307$
2	$1\frac{8}{9}$	$0,741$	$-0,296$
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{11}{49}$	$0,606$	$-0,24$
3	$2\frac{1}{2}$	$0,5$	$-0,188$
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{59}{81}$	$0,417$	$-0,146$
4	$2\frac{23}{25}$	$0,352$	$-0,115$
$4\frac{1}{2}$	$3,08$	$0,301$	$-0,0918$
5	$3\frac{2}{9}$	$0,259$	$-\frac{2}{27}$
$5\frac{1}{2}$	$3,34$	$0,226$	$-0,0605$
6	$3\frac{22}{49}$	$0,198$	$-0,05$
$6\frac{1}{2}$	$3,54$	$0,175$	$-0,0417$
7	$3\frac{5}{8}$	$\frac{5}{32}$	$-0,0352$

Aufgabe (15)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & +3x^2 & & -4 \quad) : (x-1) = x^2 + 4x + 4 \\
-(x^3 & -x^2) & & \\ \hline
 & 4x^2 & & -4 \\
 & -(4x^2 & -4x) & \\ \hline
 & & 4x & -4 \\
 & & -(4x & -4) \\ \hline
 & & & 0
\end{array}$$

$1x^2 + 4x + 4 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-4 + 0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-4 - 0}{2}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\underline{x_3 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+2)^2(x-1)}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^2}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{lll}
(x^3 & +3x^2 & -4 \quad) : (x^2) = x + 3 \\
-(x^3) & & \\ \hline
 & 3x^2 & -4 \\
 & -(3x^2) & \\ \hline
 & & -4
\end{array}$$

$f(x) = x + 3 + \dfrac{-4}{x^2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(3x^2 + 6x) \cdot x^2 - (x^3 + 3x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2)^2}$

$= \dfrac{(3x^4 + 6x^3) - (2x^4 + 6x^3 - 8x)}{(x^2)^2}$

$= \dfrac{x^4 + 8x}{(x^2)^2}$

$= \frac{x^4 + 8x}{(x^2)^2}$
$= \frac{(x^2 - 2x + 4)(x + 2)x}{x^4}$
$= \frac{(x^2 - 2x + 4)(x + 2)}{x^3}$
$= \frac{x^3 + 8}{x^3}$
$f''(x) = \frac{3x^2 \cdot x^3 - (x^3 + 8) \cdot 3x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{3x^5 - (3x^5 + 24x^2)}{(x^3)^2}$
$= \frac{-24x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{-24x^2}{(x^3)^2}$
$= \frac{-24x^2}{x^6}$
$= \frac{-24}{x^4}$
$= \frac{-24}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
$\underline{x_4 = -2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]1;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]-2;0[\quad \cup \quad]0;1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3})}{x^2(1)} = \infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3(1 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^3})}{x^2(1)} = \infty$
Schiefe Asymptote:$y = x + 3$
$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{(x + 2)^2(x - 1)}{x^2} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{(x + 2)^2(x - 1)}{x^2} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{x^3 + 8}{x^3} = 0$

$x^3 + 8 = 01x^3 + 8 = 0 \qquad / - 8$
$1x^3 = -8 \qquad / : 1$
$x^3 = \frac{-8}{1}$
$x = \sqrt[3]{-8}$
$x = -2$
Polynomdivision:(-2)

$$\begin{array}{llllll}
(x^3 & & & +8 &) : (x+2) = x^2 - 2x + 4 \\
-(x^3 & +2x^2) & & & \\
\hline
 & -2x^2 & & +8 & \\
 & -(-2x^2 & -4x) & & \\
\hline
 & & 4x & +8 & \\
 & & -(4x & +8) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$1x^2 - 2x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{-12}}{2}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_6 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2) = -1\frac{1}{2}$
$f''(-2) < 0 \Rightarrow$ $\underline{\text{Hochpunkt:}(-2/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{x^3 + 8}{x^3}$
Zaehler = 0
$\underline{x_7 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_8 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-2; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

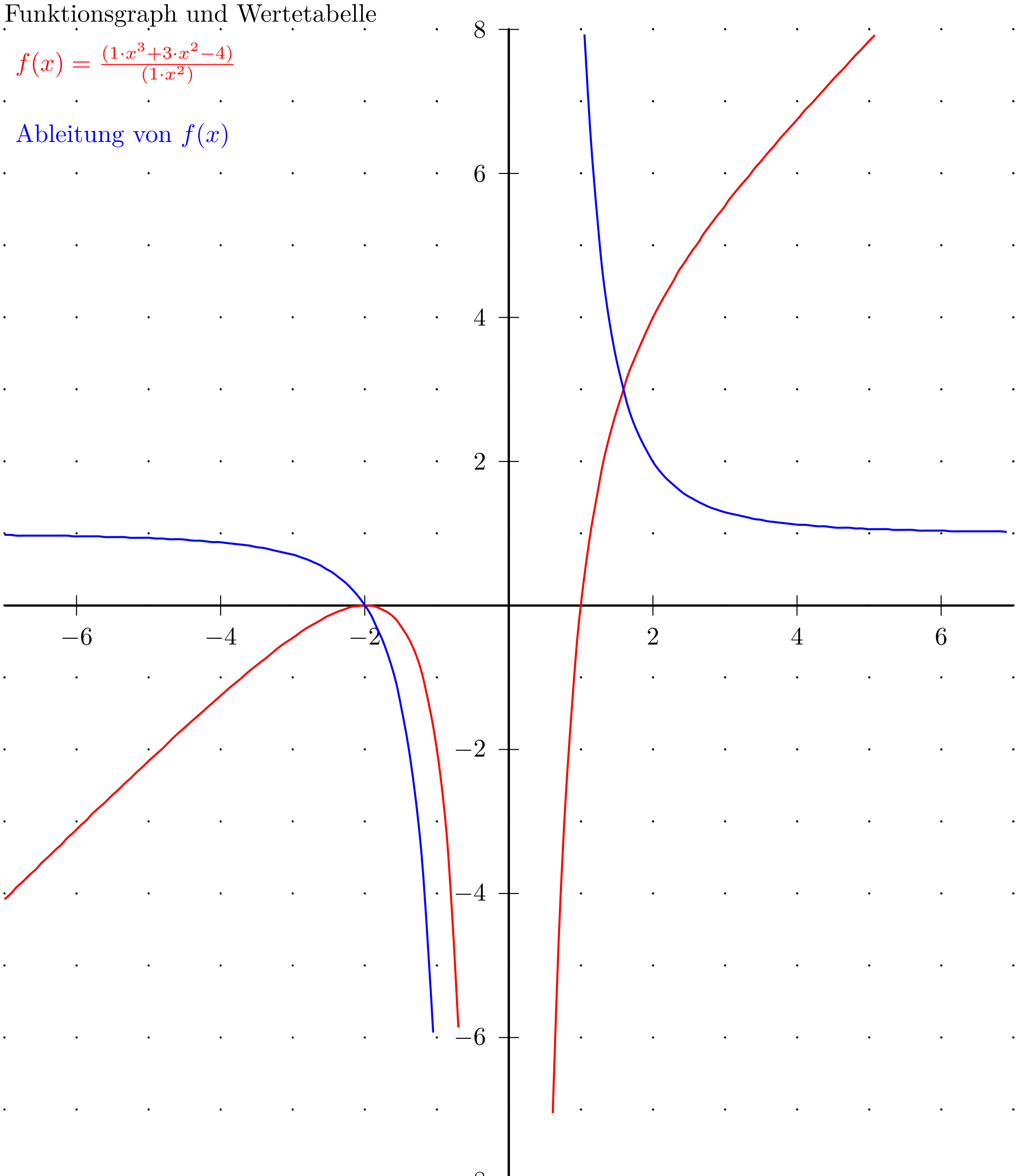
• Kruemmung
$f''(x) = \frac{-24}{x^4}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_9 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-4\frac{4}{49}$	$0,977$	$-0,01$
$-6\frac{1}{2}$	$-3,59$	$0,971$	$-0,0134$
-6	$-3\frac{1}{9}$	$\frac{26}{27}$	$-\frac{1}{54}$
$-5\frac{1}{2}$	$-2,63$	$0,952$	$-0,0262$
-5	$-2\frac{4}{25}$	$0,936$	$-0,0384$
$-4\frac{1}{2}$	$-1,7$	$0,912$	$-0,0585$
-4	$-1\frac{1}{4}$	$0,875$	$-0,0938$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{81}{98}$	$0,813$	$-0,16$
-3	$-\frac{4}{9}$	$0,704$	$-0,296$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{50}$	$0,488$	$-0,614$
-2	0	$-0,000153$	$-1,5$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{18}$	$-1,37$	$-4,74$
-1	-2	-7	-24
$-\frac{1}{2}$	$-13\frac{1}{2}$	$-63,2$	-385
0	$-unendlich$	1	$+unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-unendlich$	1	$+unendlich$
$\frac{1}{2}$	$-12\frac{1}{2}$	$65,2$	-385
1	0	9	-24
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{13}{18}$	$3,37$	$-4,74$
2	4	2	$-1,5$
$2\frac{1}{2}$	$4\frac{43}{50}$	$1,51$	$-0,614$
3	$5\frac{5}{9}$	$1,3$	$-0,296$
$3\frac{1}{2}$	$6\frac{17}{98}$	$1,19$	$-0,16$
4	$6\frac{3}{4}$	$1,13$	$-0,0938$
$4\frac{1}{2}$	$7,3$	$1,09$	$-0,0585$
5	$7\frac{21}{25}$	$1,06$	$-0,0384$
$5\frac{1}{2}$	$8,37$	$1,05$	$-0,0262$
6	$8\frac{8}{9}$	$1\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{54}$
$6\frac{1}{2}$	$9,41$	$1,03$	$-0,0134$
7	$9\frac{45}{49}$	$1,02$	$-0,01$

Aufgabe (16)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{-x^3+3x^2-4}{-\frac{1}{2}x^2-3x-4\frac{1}{2}}$

Zaehler faktorisieren:

$-x^3+3x^2-4=0$

$-x^3+3x^2-4=0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$
\begin{array}{llll}
(-x^3 & +3x^2 & & -4 \quad) : (x+1) = -x^2+4x-4 \\
-(-x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & 4x^2 & & -4 \\
 & -(4x^2 & +4x) & \\
\hline
 & & -4x & -4 \\
 & & -(-4x & -4) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

$-x^2+4x-4=0$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)}}{2\cdot(-1)}$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 0}{-2}$

$x_1 = \dfrac{-4+0}{-2} \qquad x_2 = \dfrac{-4-0}{-2}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2$

$\underline{x_1 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 2;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$-\dfrac{1}{2}x^2-3x-4\dfrac{1}{2}=0$

$-\dfrac{1}{2}x^2-3x-4\dfrac{1}{2}=0$

$x_{1/2} = \dfrac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-4\frac{1}{2}\right)}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$x_{1/2} = \dfrac{+3 \pm \sqrt{0}}{-1}$

$x_{1/2} = \dfrac{3 \pm 0}{-1}$

$x_1 = \dfrac{3+0}{-1} \qquad x_2 = \dfrac{3-0}{-1}$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = -3$

$\underline{x_3 = -3;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{-(x+1)(x-2)^2}{-\frac{1}{2}(x+3)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$f(x) = \dfrac{2x^3-6x^2+8}{x^2+6x+9}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llllll}
(2x^3 & -6x^2 & & +8 &) : (x^2+6x+9) = 2x-18 \\
-(2x^3 & +12x^2 & +18x) & & \\
\hline
 & -18x^2 & -18x & +8 & \\
 & -(-18x^2 & -108x & -162) & \\
\hline
 & & 90x & +170 &
\end{array}$$

$f(x) = 2x - 18 + \dfrac{90x+170}{x^2+6x+9}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(6x^2-12x)\cdot(x^2+6x+9)-(2x^3-6x^2+8)\cdot(2x+6)}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \dfrac{(6x^4+24x^3-18x^2-108x)-(4x^4-36x^2+16x+48)}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \dfrac{2x^4+24x^3+18x^2-124x-48}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \dfrac{2x^4+24x^3+18x^2-124x-48}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \dfrac{2(x+10,6)(x+3)(x+0,377)(x-2)}{(x+3)^4}$

$= \dfrac{2(x+10,6)(x+0,377)(x-2)}{(x+3)^3}$

$= \dfrac{2x^3+18x^2-36x-16}{x^3+9x^2+27x+27}$

$f''(x) = \dfrac{(6x^2+36x-36)\cdot(x^3+9x^2+27x+27)-(2x^3+18x^2-36x-16)\cdot(3x^2+18x+27)}{(x^3+9x^2+27x+27)^2}$

$= \dfrac{(6x^5+90x^4+450x^3+810x^2-972)-(6x^5+90x^4+270x^3-210x^2-1,26\cdot10^3x-432)}{(x^3+9x^2+27x+27)^2}$

$= \dfrac{180x^3+1,02\cdot10^3x^2+1,26\cdot10^3x-540}{(x^3+9x^2+27x+27)^2}$

$= \dfrac{180x^3+1,02\cdot10^3x^2+1,26\cdot10^3x-540}{(x^3+9x^2+27x+27)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$2x^3 - 6x^2 + 8 = 0$

$\underline{x_4 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = 2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{x \in]-1;2[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]-3;-1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3(-1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3})}{x^2(-\frac{1}{2}-\frac{3}{x}-\frac{4\frac{1}{2}}{x^2})} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(-1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3})}{x^2(-\frac{1}{2}-\frac{3}{x}-\frac{4\frac{1}{2}}{x^2})} = \infty$$

Schiefe Asymptote:$y = 2x - 18$
$\lim\limits_{x \to -3^+} \frac{2(x+1)(x-2)^2}{(x+3)^2} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to -3^-} \frac{2(x+1)(x-2)^2}{(x+3)^2} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -3$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{2x^3 + 18x^2 - 36x - 16}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27} = 0$

$2x^3 + 18x^2 - 36x - 16 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:2

$$\begin{array}{llllll}
(2x^3 & +18x^2 & -36x & -16 &) : (x-2) = 2x^2 + 22x + 8 \\
-(2x^3 & -4x^2) & & & \\
\hline
 & 22x^2 & -36x & -16 & \\
 & -(22x^2 & -44x) & & \\
\hline
 & & 8x & -16 & \\
 & & -(8x & -16) & \\
\hline
 & & & -0 &
\end{array}$$

$2x^2 + 22x + 8 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-22 \pm \sqrt{22^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2}$
$x_{1/2} = \frac{-22 \pm \sqrt{420}}{4}$
$x_{1/2} = \frac{-22 \pm 20,5}{4}$
$x_1 = \frac{-22 + 20,5}{4} \qquad x_2 = \frac{-22 - 20,5}{4}$
$x_1 = -0,377 \qquad x_2 = -10,6$
$\underline{x_6 = -10,6; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7 = -0,377; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_8 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-10,6) = 0,515 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-10,6/-52,8)}$
$f''(-0,377) = -2,67$
$f''(-0,377) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-0,377/1,02)}$
$f''(2) = 0,388 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{2x^3 + 18x^2 - 36x - 16}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$
Zaehler = 0
$\underline{x_9 = -10,6; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_10 = -0,377; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_11 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_12 = -3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-10,6$	$< x <$	-3	$< x <$	$-0,377$	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -10,6[\quad \cup \quad]-3; -0,377[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-10,6; -3[\quad \cup \quad]-0,377; 2[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{180x^3 + 1,02 \cdot 10^3 x^2 + 1,26 \cdot 10^3 x - 540}{x^6 + 18x^5 + 135x^4 + 540x^3 + 1,22 \cdot 10^3 x^2 + 1,46 \cdot 10^3 x + 729}$

$Zaehler = 0$

$180x^3 + 1,02 \cdot 10^3 x^2 + 1,26 \cdot 10^3 x - 540 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -3

$$\begin{array}{llll}
(180x^3 & +1,02 \cdot 10^3 x^2 & +1,26 \cdot 10^3 x & -540 \quad) : (x+3) = 180x^2 + 480x - 180 \\
-(180x^3 & +540x^2) & & \\
\hline
 & 480x^2 & +1,26 \cdot 10^3 x & -540 \\
 & -(480x^2 & +1,44 \cdot 10^3 x) & \\
\hline
 & & -180x & -540 \\
 & & -(-180x & -540) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$180x^2 + 480x - 180 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-480 \pm \sqrt{480^2 - 4 \cdot 180 \cdot (-180)}}{2 \cdot 180}$

$x_{1/2} = \dfrac{-480 \pm \sqrt{3,6 \cdot 10^5}}{360}$

$x_{1/2} = \dfrac{-480 \pm 600}{360}$

$x_1 = \dfrac{-480 + 600}{360} \qquad x_2 = \dfrac{-480 - 600}{360}$

$x_1 = \dfrac{1}{3} \qquad x_2 = -3$

$\underline{x_1 3 = -3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_1 4 = \dfrac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

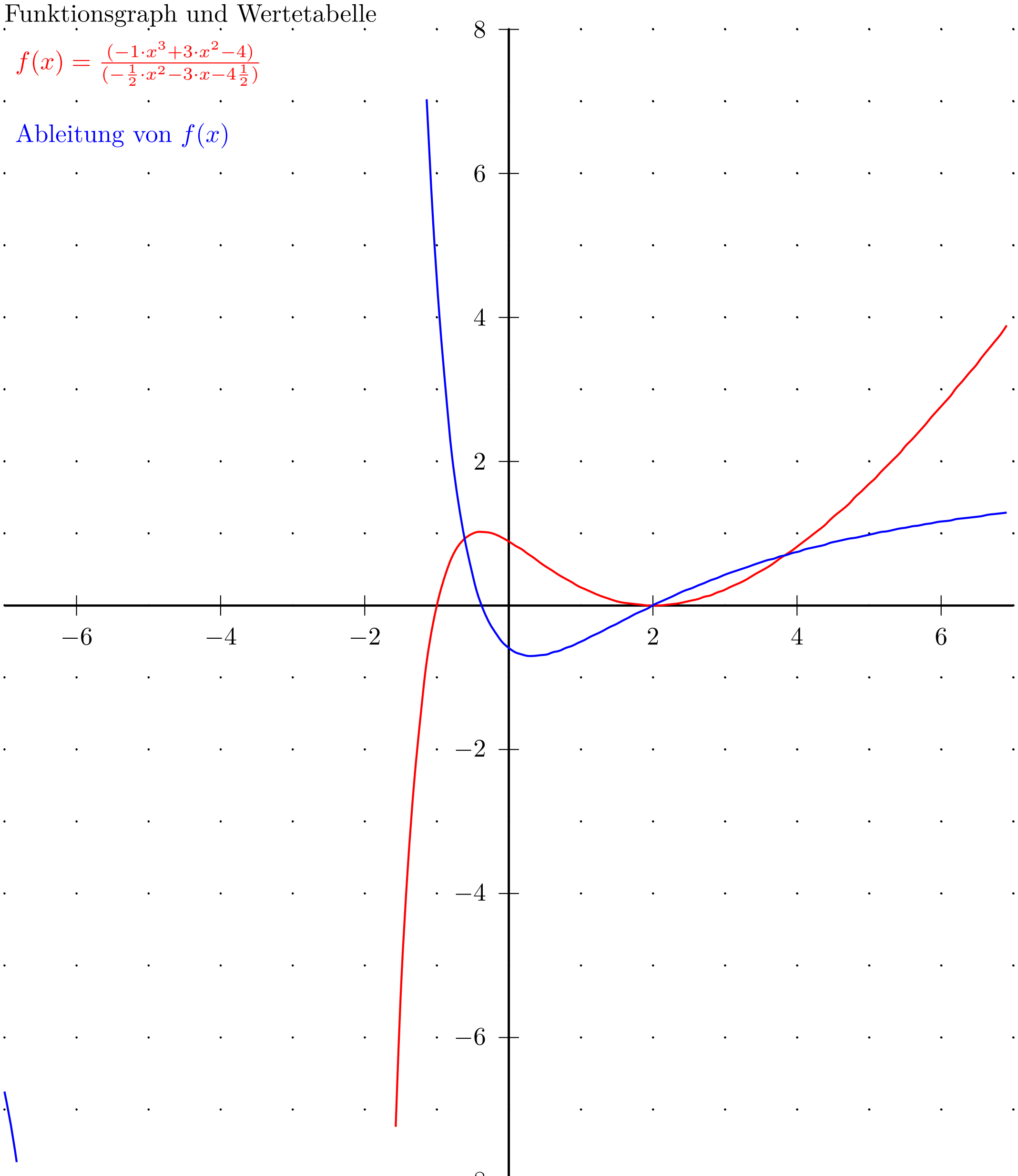
$\underline{x_1 5 = -3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-3	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -3[\quad \cup \quad]\dfrac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-3; \dfrac{1}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-60\frac{3}{4}$	$-6,75$	$-5,16$
$-6\frac{1}{2}$	$-64\frac{43}{49}$	-10	$-8,2$
-6	$-71\frac{1}{9}$	$-15,4$	$-14,1$
$-5\frac{1}{2}$	-81	$-25,2$	$-26,9$
-5	-98	$-45,5$	-60
$-4\frac{1}{2}$	$-131\frac{4}{9}$	$-97,3$	-172
-4	-216	-288	-780
$-3\frac{1}{2}$	-605	$-1,96\cdot 10^3$	$-1,11\cdot 10^4$
-3	$+unendlich$	$293879\frac{27}{49}$	$-unendlich$
$-2\frac{1}{2}$	-243	$1,25\cdot 10^3$	$-8,18\cdot 10^3$
-2	-32	112	-420
$-1\frac{1}{2}$	$-5\frac{4}{9}$	$21,3$	$-65,2$
-1	0	$4,5$	-15
$-\frac{1}{2}$	1	$0,401$	$-3,84$
0	$\frac{8}{9}$	$-0,592$	$-0,741$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{8}{9}$	$-0,592$	$-0,741$
$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{49}$	$-0,682$	$0,2$
1	$\frac{1}{4}$	$-0,5$	$0,469$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{5}{81}$	$-0,25$	$0,512$
2	0	$-4,9\cdot 10^{-6}$	$0,48$
$2\frac{1}{2}$	$0,0579$	$0,227$	$0,426$
3	$\frac{2}{9}$	$0,426$	$\frac{10}{27}$
$3\frac{1}{2}$	$0,479$	$0,598$	$0,319$
4	$\frac{40}{49}$	$0,746$	$0,275$
$4\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{9}$	$0,874$	$0,237$
5	$1\frac{11}{16}$	$0,984$	$0,205$
$5\frac{1}{2}$	$2,2$	$1,08$	$0,178$
6	$2\frac{62}{81}$	$1,16$	$0,155$
$6\frac{1}{2}$	$3,37$	$1,24$	$0,136$
7	4	$1,3$	$\frac{3}{25}$

4 Gebrochen rationale Funktion Zählergrad > Nennergrad

4.1 Aufgaben

(1) $f(x) = \frac{x^2+3x}{2x-1}$

(2) $f(x) = \frac{x^2+x-6}{5x-2}$

(3) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

(4) $f(x) = \frac{2x^2-8}{2x-3}$

(5) $f(x) = \frac{x^2+6x+8}{-9x-3}$

(6) $f(x) = \frac{3x^3-10x^2+7x-12}{x-3}$

(7) $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x^3-1\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2}{x-2}$

(8) $f(x) = \frac{x^3+x^2-4x-4}{x-2}$

(9) $f(x) = \frac{x^3+5x^2-x-5}{x+1}$

(10) $f(x) = \frac{3x^3-x^2-3x+1}{x-1}$

(11) $f(x) = \frac{x^3-8x+2}{x+2}$

(12) $f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2+1}$

(13) $f(x) = \frac{x^3+x}{x^2-x-12}$

(14) $f(x) = \frac{x^4-3x^2-4}{x^2-4}$

(15) $f(x) = \frac{x^4-5x^2+4}{x^2-3x+2}$

(16) $f(x) = \frac{x^2-6x+9}{-x+2}$

(17) $f(x) = \frac{x^2+3x+3}{3x+6}$

(18) $f(x) = \frac{x^3+3x^2-4}{x^2}$

(19) $f(x) = \frac{-x^3+3x^2-4}{-\frac{1}{2}x^2-3x-4\frac{1}{2}}$

(20) $f(x) = \frac{3x^3-10x^2+7x-12}{x-3}$

(21) $f(x) = \frac{x^3-6x^2+11x-6}{x-2}$

(22) $f(x) = \frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-1}$

4.2 Lösungen

Aufgabe (1)

•Funktion/Faktorisieren

$f\left(x\right)=\dfrac{x^2+3x}{2x-1}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2+3x=0$

$x(x+3)=0\Rightarrow x=0\quad\wedge\quad x+3=0$

$x+3=0\qquad/-3$

$x=-3$

$\underline{x_1=-3;\quad\text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2=0;\quad\text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$2x-1=0$

$2x-1=0\qquad/+1$

$2x=1\qquad/:2$

$x=\dfrac{1}{2}$

$x=\dfrac{1}{2}$

$\underline{x_3=\dfrac{1}{2};\quad\text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f\left(x\right)=\dfrac{(x+3)x}{2(x-\frac{1}{2})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

$f\left(x\right)=\dfrac{\frac{1}{2}x^2+1\frac{1}{2}x}{x-\frac{1}{2}}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{lll}
(\frac{1}{2}x^2 & +1\frac{1}{2}x &):(x-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}x+1\frac{3}{4}\\
-(\frac{1}{2}x^2 & -\frac{1}{4}x) & \\
\hline
 & 1\frac{3}{4}x & \\
 & -(1\frac{3}{4}x\quad -\frac{7}{8}) & \\
\hline
 & \quad\frac{7}{8} &
\end{array}$$

$f(x)=\dfrac{1}{2}x+1\dfrac{3}{4}+\dfrac{\frac{7}{8}}{x-\frac{1}{2}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'\left(x\right)=\dfrac{(x+1\frac{1}{2})\cdot(x-\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}x^2+1\frac{1}{2}x)\cdot 1}{(x-\frac{1}{2})^2}$

$=\dfrac{(x^2+x-\frac{3}{4})-(\frac{1}{2}x^2+1\frac{1}{2}x)}{(x-\frac{1}{2})^2}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}}{(x-\frac{1}{2})^2}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}}{(x-\frac{1}{2})^2}$

$f''\left(x\right)=\dfrac{(x-\frac{1}{2})\cdot(x^2-x+\frac{1}{4})-(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4})\cdot(2x-1)}{(x^2-x+\frac{1}{4})^2}$

$=\dfrac{(x^3-1\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{8})-(x^3-1\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{4})}{(x^2-x+\frac{1}{4})^2}$

$= \frac{1\frac{3}{4}x - \frac{7}{8}}{(x^2 - x + \frac{1}{4})^2}$
$= \frac{1\frac{3}{4}x - \frac{7}{8}}{(x^2 - x + \frac{1}{4})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{2}x = 0$
$\underline{x_4 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	0	$< x <$	$\frac{1}{2}$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-3;0[\quad \cup \quad]\frac{1}{2};\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]0;\frac{1}{2}[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2(1+\frac{3}{x})}{x(2-\frac{1}{x})} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2(1+\frac{3}{x})}{x(2-\frac{1}{x})} = \infty$

Schiefe Asymptote:$y = \frac{1}{2}x + 1\frac{3}{4}$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{\frac{1}{2}(x+3)x}{(x-\frac{1}{2})} = \infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} \frac{\frac{1}{2}(x+3)x}{(x-\frac{1}{2})} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = \frac{1}{2}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}}{x^2 - x + \frac{1}{4}} = 0$

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$

$x_{1/2} = \frac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$

$x_{1/2} = \frac{+\frac{1}{2} \pm \sqrt{1\frac{3}{4}}}{1}$

$x_{1/2} = \frac{\frac{1}{2} \pm 1,32}{1}$

$x_1 = \frac{\frac{1}{2} + 1,32}{1} \qquad x_2 = \frac{\frac{1}{2} - 1,32}{1}$

$x_1 = 1,82 \qquad x_2 = -0,823$

$\underline{x_6 = -0,823; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_7 = 1,82; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-0,823) = -\frac{2}{7}$
$f''(-0,823) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-0,823/0,677)}$
$f''(1,82) = -\frac{2}{7}$
$f''(1,82) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(1,82/3,32)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}}{x^2 - x + \frac{1}{4}}$
Zaehler = 0
$\underline{x_8 = -0,823; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_9 = 1,82; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_10 = \frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-0,823$	$< x <$	$\frac{1}{2}$	$< x <$	$1,82$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -0,823[\quad \cup \quad]1,82; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-0,823; \frac{1}{2}[\quad \cup \quad]\frac{1}{2}; 1,82[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung
$f''(x) = \frac{1\frac{3}{4}x - \frac{7}{8}}{x^4 - 2x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}}$
$Zaehler = 0$

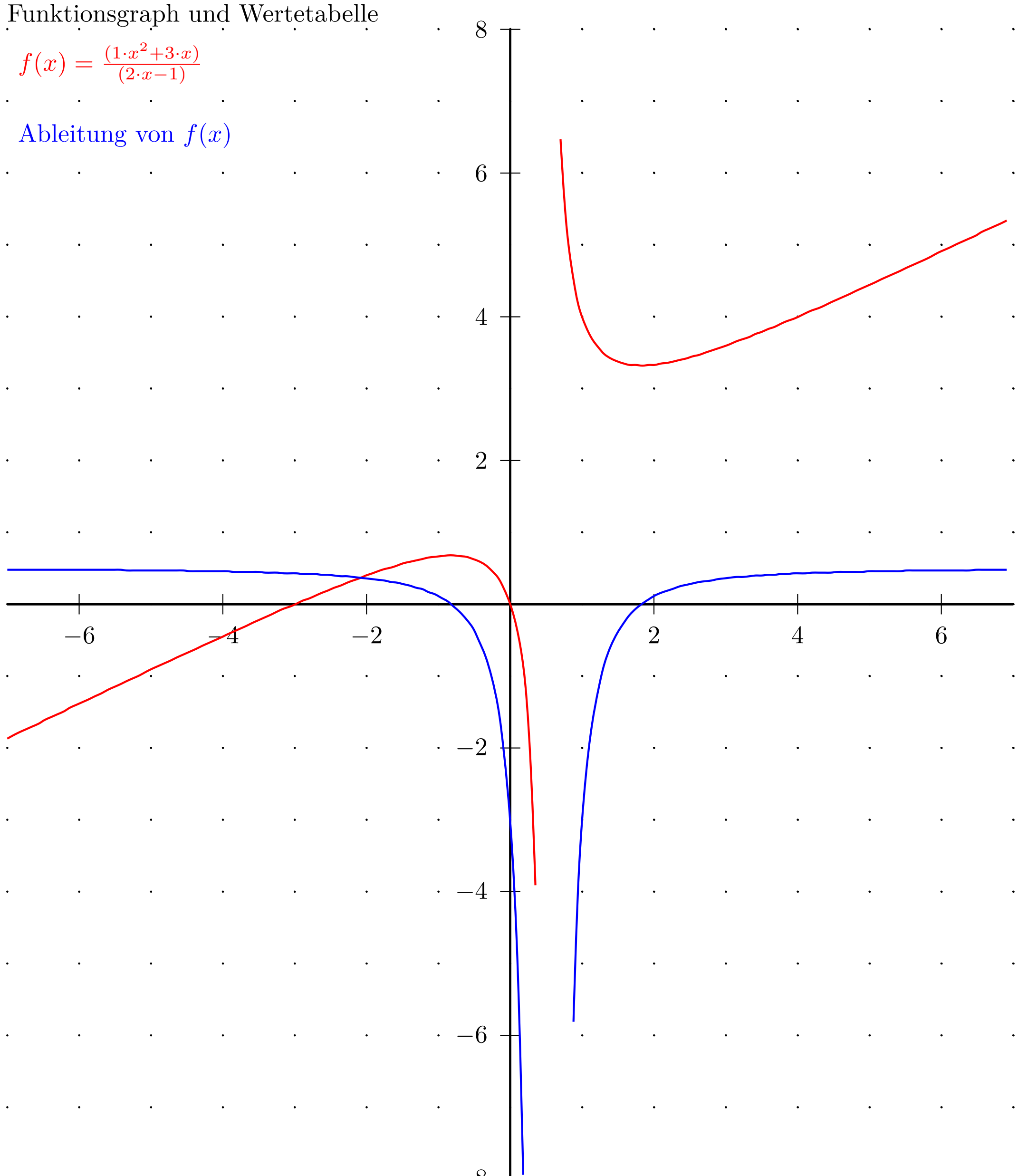
$1\frac{3}{4}x - \frac{7}{8} = 0 \qquad / + \frac{7}{8}$
$1\frac{3}{4}x = \frac{7}{8} \qquad / : 1\frac{3}{4}$
$x = \frac{\frac{7}{8}}{1\frac{3}{4}}$
$x = \frac{1}{2}$
$\underline{x_11 = \frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_12 = \frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$\frac{1}{2}$	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\quad \cup \quad]\frac{1}{2}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-1\frac{13}{15}$	$0,484$	$-0,00415$
$-6\frac{1}{2}$	$-1\frac{5}{8}$	$\frac{27}{56}$	$-0,0051$
-6	$-1\frac{5}{13}$	$0,479$	$-0,00637$
$-5\frac{1}{2}$	$-1\frac{7}{48}$	$0,476$	$-0,0081$
-5	$-\frac{10}{11}$	$0,471$	$-0,0105$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{40}$	$0,465$	$-0,014$
-4	$-\frac{4}{9}$	$\frac{37}{81}$	$-0,0192$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{32}$	$0,445$	$-0,0273$
-3	0	$0,429$	$-0,0408$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{5}{24}$	$0,403$	$-0,0648$
-2	$\frac{2}{5}$	$0,36$	$-0,112$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{9}{16}$	$0,281$	$-0,219$
-1	$\frac{2}{3}$	$0,111$	$-0,519$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$-0,375$	$-1,75$
0	0	-3	-14

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	-3	-14
$\frac{1}{2}$	$+unendlich$	$2857\frac{9}{14}$	$-unendlich$
1	4	-3	14
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{8}$	$-0,375$	$1,75$
2	$3\frac{1}{3}$	$0,111$	$0,519$
$2\frac{1}{2}$	$3\frac{7}{16}$	$0,281$	$0,219$
3	$3\frac{3}{5}$	$0,36$	$0,112$
$3\frac{1}{2}$	$3\frac{19}{24}$	$0,403$	$0,0648$
4	4	$0,429$	$0,0408$
$4\frac{1}{2}$	$4\frac{7}{32}$	$0,445$	$0,0273$
5	$4\frac{4}{9}$	$\frac{37}{81}$	$0,0192$
$5\frac{1}{2}$	$4\frac{27}{40}$	$0,465$	$0,014$
6	$4\frac{10}{11}$	$0,471$	$0,0105$
$6\frac{1}{2}$	$5\frac{7}{48}$	$0,476$	$0,0081$
7	$5\frac{5}{13}$	$0,479$	$0,00637$

Aufgabe (2)

•Funktion/Faktorisieren

$f\left(x\right)=\dfrac{x^{2}+x-6}{5x-2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^{2}+x-6=0$

$1x^{2}+x-6=0$

$x_{1/2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^{2}-4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}$

$x_{1/2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{25}}{2}$

$x_{1/2}=\dfrac{-1\pm 5}{2}$

$x_{1}=\dfrac{-1+5}{2}\qquad x_{2}=\dfrac{-1-5}{2}$

$x_{1}=2\qquad x_{2}=-3$

$\underline{x_{1}=-3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_{2}=2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$5x-2=0$

$5x-2=0\qquad /+2$

$5x=2\qquad /:5$

$x=\dfrac{2}{5}$

$x=\dfrac{2}{5}$

$\underline{x_{3}=\dfrac{2}{5};\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f\left(x\right)=\dfrac{(x+3)(x-2)}{5(x-\frac{2}{5})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{2}{5}\right\}$

$f\left(x\right)=\dfrac{\frac{1}{5}x^{2}+\frac{1}{5}x-1\frac{1}{5}}{x-\frac{2}{5}}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll}
(\frac{1}{5}x^{2} & +\frac{1}{5}x & -1\frac{1}{5} &):(x-\frac{2}{5})=\frac{1}{5}x+\frac{7}{25}\\
-(\frac{1}{5}x^{2} & -\frac{2}{25}x) & & \\
\hline
 & \frac{7}{25}x & -1\frac{1}{5} & \\
 & -(\frac{7}{25}x & -0,112) & \\
\hline
 & & -1,09 &
\end{array}$$

$f(x)=\dfrac{1}{5}x+\dfrac{7}{25}+\dfrac{-1,09}{x-\frac{2}{5}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'\left(x\right)=\dfrac{(\frac{2}{5}x+\frac{1}{5})\cdot(x-\frac{2}{5})-(\frac{1}{5}x^{2}+\frac{1}{5}x-1\frac{1}{5})\cdot 1}{(x-\frac{2}{5})^{2}}$

$=\dfrac{(\frac{2}{5}x^{2}+\frac{1}{25}x-\frac{2}{25})-(\frac{1}{5}x^{2}+\frac{1}{5}x-1\frac{1}{5})}{(x-\frac{2}{5})^{2}}$

$=\dfrac{\frac{1}{5}x^{2}-\frac{4}{25}x+1\frac{3}{25}}{(x-\frac{2}{5})^{2}}$

$= \frac{\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x + 1\frac{3}{25}}{(x-\frac{2}{5})^2}$

$f''(x) = \frac{(\frac{2}{5}x - \frac{4}{25}) \cdot (x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}) - (\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x + 1\frac{3}{25}) \cdot (2x - \frac{4}{5})}{(x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25})^2}$

$= \frac{(\frac{2}{5}x^3 - \frac{12}{25}x^2 + 0,192x - 0,0256) - (\frac{2}{5}x^3 - \frac{12}{25}x^2 + 2,37x - 0,896)}{(x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25})^2}$

$= \frac{-2,18x + 0,87}{(x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25})^2}$

$= \frac{-2,18x + 0,87}{(x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x - 1\frac{1}{5} = 0$

$\underline{x_4 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	$\frac{2}{5}$	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-3; \frac{2}{5}[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -3[\quad \cup \quad]\frac{2}{5}; 2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2(1 + x - \frac{6}{x^2})}{x(5 - \frac{2}{x})} = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2(1 + x - \frac{6}{x^2})}{x(5 - \frac{2}{x})} = \infty$

Schiefe Asymptote:$y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{25}$

$\lim\limits_{x\to\frac{2}{5}^+} \frac{\frac{1}{5}(x+3)(x-2)}{(x-\frac{2}{5})} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to\frac{2}{5}^-} \frac{\frac{1}{5}(x+3)(x-2)}{(x-\frac{2}{5})} = \infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = \frac{2}{5}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x + 1\frac{3}{25}}{x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}} = 0$

$\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x + 1\frac{3}{25} = 0$

$x_{1/2} = \frac{+\frac{4}{25} \pm \sqrt{\left(-\frac{4}{25}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{5} \cdot 1\frac{3}{25}}}{2 \cdot \frac{1}{5}}$

$x_{1/2} = \frac{+\frac{4}{25} \pm \sqrt{-0,87}}{\frac{2}{5}}$

Diskriminante negativ keine Lösung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{25}x + 1\frac{3}{25}}{x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}}$

Zaehler $= 0$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_6 = \frac{2}{5}$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	$\frac{2}{5}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; \frac{2}{5}[\quad \cup \quad]\frac{2}{5}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{-2,18x + 0,87}{x^4 - 1\frac{3}{5}x^3 + \frac{24}{25}x^2 - 0,256x + 0,0256}$

$Zaehler = 0$

$-2,18x + 0,87 = 0 \qquad / -0,87$

$-2,18x = -0,87 \qquad / : (-2,18)$

$x = \frac{-0,87}{-2,18}$

$x = \frac{2}{5}$

$x_7 = \frac{2}{5}$; 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_8 = \frac{2}{5}$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	$\frac{2}{5}$	$< x <$	$\frac{2}{5}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; \frac{2}{5}[\quad \cup \quad]\frac{2}{5}; \frac{2}{5}[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]\frac{2}{5}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-\frac{36}{37}$	$0,22$	$0,00537$
$-6\frac{1}{2}$	$-0,862$	$0,223$	$0,00662$
-6	$-\frac{3}{4}$	$0,227$	$0,0083$
$-5\frac{1}{2}$	$-0,636$	$0,231$	$0,0106$
-5	$-\frac{14}{27}$	$0,237$	$0,0138$
$-4\frac{1}{2}$	$-\frac{39}{98}$	$0,245$	$0,0185$
-4	$-\frac{3}{11}$	$0,256$	$0,0255$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{11}{78}$	$0,272$	$0,0367$
-3	0	$0,294$	$0,0554$
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{9}{58}$	$0,329$	$0,0892$
-2	$\frac{1}{3}$	$0,389$	$0,157$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{21}{38}$	$0,501$	$0,317$
-1	$\frac{6}{7}$	$0,755$	$0,793$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{18}$	$1,54$	$2,99$
0	3	$7,01$	$34,1$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	3	$7,01$	$34,1$
$\frac{1}{2}$	$-10\frac{1}{2}$	112	$-2,24\cdot 10^3$
1	$-1\frac{1}{3}$	$3,22$	$-10,1$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{22}$	$1,1$	$-1,64$
2	0	$0,625$	$-0,531$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{11}{42}$	$0,447$	$-0,235$
3	$\frac{6}{13}$	$0,361$	$-0,124$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{39}{62}$	$0,313$	$-0,073$
4	$\frac{7}{9}$	$0,284$	$-0,0466$
$4\frac{1}{2}$	$\frac{75}{82}$	$0,265$	$-0,0316$
5	$1\frac{1}{23}$	$0,251$	$-0,0224$
$5\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{6}$	$0,242$	$-0,0164$
6	$1\frac{2}{7}$	$\frac{23}{98}$	$-0,0124$
$6\frac{1}{2}$	$1,4$	$0,229$	$-0,00959$
7	$1\frac{17}{33}$	$0,225$	$-0,00757$

Aufgabe (3)

•Funktion/Faktorisieren

$f\left(x\right)=\dfrac{x^2-1}{x}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2-1=0$

$1x^2-1=0 \qquad /+1$

$1x^2=1 \qquad /:1$

$x^2=\dfrac{1}{1}$

$x=\pm\sqrt{1}$

$x_1=1 \qquad x_2=-1$

$\underline{x_1=-1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2=1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x=0$

$x=0\Rightarrow x=0$

$\underline{x_3=0;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f\left(x\right)=\dfrac{(x+1)(x-1)}{x}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f\left(x\right)=\dfrac{x^2-1}{x}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{l} \quad (x^2 \qquad\qquad -1 \quad):(x)=x \\ \; -(x^2) \\ \hline \qquad\qquad -1 \end{array}$$

$f(x)=x+\dfrac{-1}{x}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'\left(x\right)=\dfrac{2x\cdot x-(x^2-1)\cdot 1}{(x)^2}$

$=\dfrac{2x^2-(x^2-1)}{(x)^2}$

$=\dfrac{x^2+1}{(x)^2}$

$=\dfrac{x^2+1}{(x)^2}$

$f''\left(x\right)=\dfrac{2x\cdot x^2-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2)^2}$

$=\dfrac{2x^3-(2x^3+2x)}{(x^2)^2}$

$=\dfrac{-2x}{(x^2)^2}$

$=\dfrac{-2x}{(x^2)^2}$

$=\dfrac{-2x}{x^4}$

$=\dfrac{-2}{x^3}$

$= \frac{-2}{x^3}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x^2 - 1 = 0$
$\underline{x_4 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	0	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-1;0[\quad \cup \quad]1;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-1[\quad \cup \quad]0;1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x(1)} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x(1)} = \infty$
Schiefe Asymptote:$y = x$
$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2} = 0$

$1x^2 + 1 = 0 \qquad / - 1$
$1x^2 = -1 \qquad / : 1$
$x^2 = \frac{-1}{1}$
keine Lösung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$
Zaehler = 0

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_6 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty;0[\quad \cup \quad]0;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{-2}{x^3}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

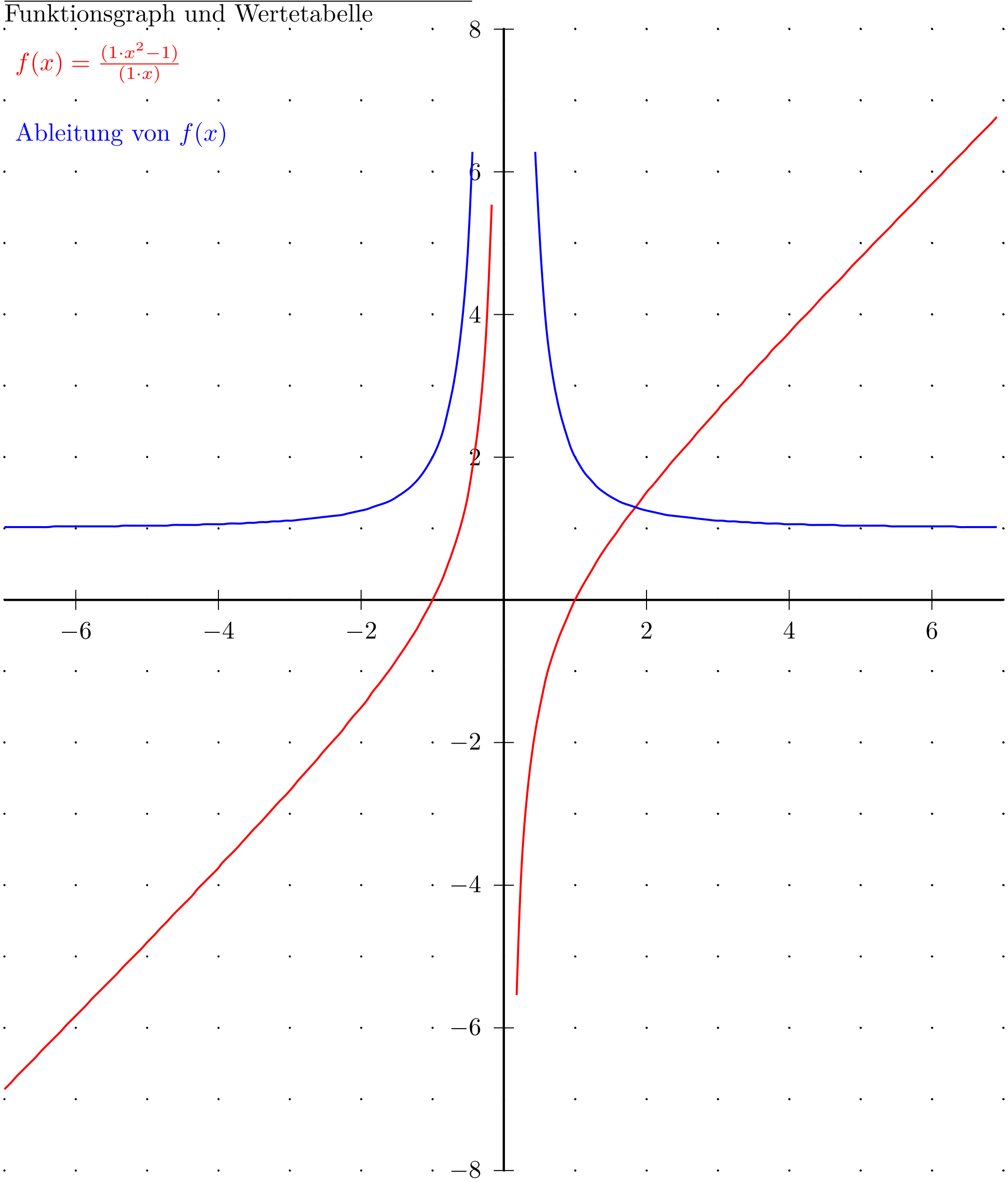
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_7 = 0$; 1-fache Nullstelle

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 0[$ $f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]0; \infty[$ $f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-6\frac{6}{7}$	$1\frac{1}{49}$	$0,00583$
$-6\frac{1}{2}$	$-6\frac{9}{26}$	$1,02$	$0,00728$
-6	$-5\frac{5}{6}$	$1\frac{1}{36}$	$0,00926$
$-5\frac{1}{2}$	$-5\frac{7}{22}$	$1,03$	$0,012$
-5	$-4\frac{4}{5}$	$1\frac{1}{25}$	$0,016$
$-4\frac{1}{2}$	$-4\frac{5}{18}$	$1\frac{4}{81}$	$0,0219$
-4	$-3\frac{3}{4}$	$1,06$	$\frac{1}{32}$
$-3\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{14}$	$1,08$	$0,0466$
-3	$-2\frac{2}{3}$	$1,11$	$0,0741$
$-2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{10}$	$1,16$	$0,128$
-2	$-1\frac{1}{2}$	$1,25$	$0,25$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{6}$	$1,44$	$0,593$
-1	0	2	2
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	5	16
0	$-unendlich$	$-3264\frac{15}{49}$	$+unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-unendlich$	$-3264\frac{15}{49}$	$+unendlich$
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	5	-16
1	0	2	-2
$1\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$1,44$	$-0,593$
2	$1\frac{1}{2}$	$1,25$	$-0,25$
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{10}$	$1,16$	$-0,128$
3	$2\frac{2}{3}$	$1,11$	$-0,0741$
$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{14}$	$1,08$	$-0,0466$
4	$3\frac{3}{4}$	$1,06$	$-\frac{1}{32}$
$4\frac{1}{2}$	$4\frac{5}{18}$	$1\frac{4}{81}$	$-0,0219$
5	$4\frac{4}{5}$	$1\frac{1}{25}$	$-0,016$
$5\frac{1}{2}$	$5\frac{7}{22}$	$1,03$	$-0,012$
6	$5\frac{5}{6}$	$1\frac{1}{36}$	$-0,00926$
$6\frac{1}{2}$	$6\frac{9}{26}$	$1,02$	$-0,00728$
7	$6\frac{6}{7}$	$1\frac{1}{49}$	$-0,00583$

Aufgabe (4)

•Funktion/Faktorisieren

$f\left(x\right)=\dfrac{2x^{2}-8}{2x-3}$

Zaehler faktorisieren:

$2x^{2}-8=0$

$2x^{2}-8=0 \qquad /+8$

$2x^{2}=8 \qquad /:2$

$x^{2}=\dfrac{8}{2}$

$x=\pm\sqrt{4}$

$x_1=2 \qquad x_2=-2$

$\underline{x_1=-2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2=2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$2x-3=0$

$2x-3=0 \qquad /+3$

$2x=3 \qquad /:2$

$x=\dfrac{3}{2}$

$x=1\dfrac{1}{2}$

$\underline{x_3=1\dfrac{1}{2};\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f\left(x\right)=\dfrac{2(x+2)(x-2)}{2(x-1\frac{1}{2})}$

• Definitionsbereich: $\qquad \mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{1\dfrac{1}{2}\right\}$

$f\left(x\right)=\dfrac{x^{2}-4}{x-1\frac{1}{2}}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llll}
(x^2 & & -4 &):(x-1\frac{1}{2})=x+1\frac{1}{2}\\
-(x^2 & -1\frac{1}{2}x) & & \\
\hline
 & 1\frac{1}{2}x & -4 & \\
 & -(1\frac{1}{2}x & -2\frac{1}{4}) & \\
\hline
 & & -1\frac{3}{4} &
\end{array}$$

$f(x)=x+1\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1\frac{3}{4}}{x-1\frac{1}{2}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'\left(x\right)=\dfrac{2x\cdot(x-1\frac{1}{2})-(x^{2}-4)\cdot 1}{(x-1\frac{1}{2})^{2}}$

$=\dfrac{(2x^{2}-3x)-(x^{2}-4)}{(x-1\frac{1}{2})^{2}}$

$=\dfrac{x^{2}-3x+4}{(x-1\frac{1}{2})^{2}}$

$=\dfrac{x^{2}-3x+4}{(x-1\frac{1}{2})^{2}}$

$f''\left(x\right)=\dfrac{(2x-3)\cdot(x^{2}-3x+2\frac{1}{4})-(x^{2}-3x+4)\cdot(2x-3)}{(x^{2}-3x+2\frac{1}{4})^{2}}$

$= \frac{(2x^3 - 9x^2 + 13\frac{1}{2}x - 6\frac{3}{4}) - (2x^3 - 9x^2 + 17x - 12)}{(x^2 - 3x + 2\frac{1}{4})^2}$
$= \frac{-3\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{4}}{(x^2 - 3x + 2\frac{1}{4})^2}$
$= \frac{-3\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{4}}{(x^2 - 3x + 2\frac{1}{4})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x^2 - 4 = 0$
$\underline{x_4 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	$1\frac{1}{2}$	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-2; 1\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]1\frac{1}{2}; 2[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2(2 - \frac{8}{x^2})}{x(2 - \frac{3}{x})} = \infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2(2 - \frac{8}{x^2})}{x(2 - \frac{3}{x})} = \infty$
Schiefe Asymptote:$y = x + 1\frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}^+} \frac{(x+2)(x-2)}{(x - 1\frac{1}{2})} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 1\frac{1}{2}^-} \frac{(x+2)(x-2)}{(x - 1\frac{1}{2})} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 1\frac{1}{2}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 3x + 2\frac{1}{4}} = 0$
$1x^2 - 3x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{-7}}{2}$
Diskriminante negativ keine Lösung

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 3x + 2\frac{1}{4}}$
Zaehler $= 0$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_6 = 1\frac{1}{2}; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$1\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

$x \in]-\infty; 1\frac{1}{2}[\quad \cup \quad]1\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{-3\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{4}}{x^4 - 6x^3 + 13\frac{1}{2}x^2 - 13\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{16}}$$

$Zaehler = 0$

$$-3\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{4} = 0 \qquad / -5\frac{1}{4}$$
$$-3\frac{1}{2}x = -5\frac{1}{4} \qquad / : \left(-3\frac{1}{2}\right)$$
$$x = \frac{-5\frac{1}{4}}{-3\frac{1}{2}}$$
$$x = 1\frac{1}{2}$$

$x_7 = 1\frac{1}{2}; \quad$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

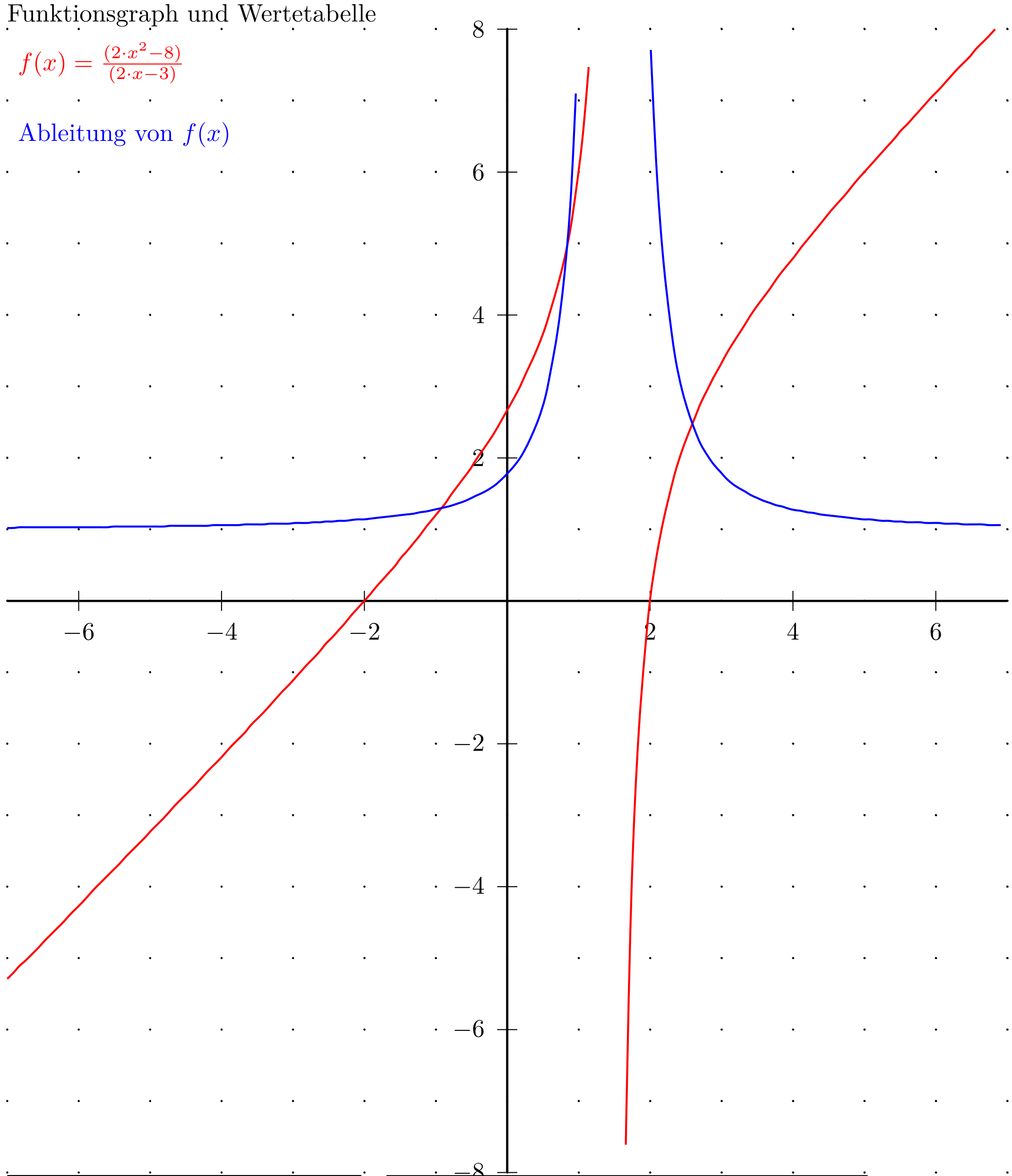
$x_8 = 1\frac{1}{2}; \quad$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$1\frac{1}{2}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; 1\frac{1}{2}[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]1\frac{1}{2}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-5\frac{5}{17}$	$1,02$	$0,0057$
$-6\frac{1}{2}$	$-4\frac{25}{32}$	$1,03$	$0,00684$
-6	$-4\frac{4}{15}$	$1,03$	$0,0083$
$-5\frac{1}{2}$	$-3\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{28}$	$\frac{1}{98}$
-5	$-3\frac{3}{13}$	$1,04$	$0,0127$
$-4\frac{1}{2}$	$-2\frac{17}{24}$	$1,05$	$0,0162$
-4	$-2\frac{2}{11}$	$1,06$	$0,021$
$-3\frac{1}{2}$	$-1\frac{13}{20}$	$1,07$	$0,028$
-3	$-1\frac{1}{9}$	$1,09$	$0,0384$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{16}$	$1,11$	$0,0547$
-2	0	$1,14$	$0,0816$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$1,19$	$0,13$
-1	$1\frac{1}{5}$	$1,28$	$0,224$
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{7}{8}$	$1,44$	$0,438$
0	$2\frac{2}{3}$	$1,78$	$1,04$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$2\frac{2}{3}$	$1,78$	$1,04$
$\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	$2,75$	$3,5$
1	6	$8,01$	28
$1\frac{1}{2}$	$-unendlich$	$-5713\frac{2}{7}$	$+unendlich$
2	0	$8,01$	-28
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	$2,75$	$-3,5$
3	$3\frac{1}{3}$	$1,78$	$-1,04$
$3\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{8}$	$1,44$	$-0,438$
4	$4\frac{4}{5}$	$1,28$	$-0,224$
$4\frac{1}{2}$	$5\frac{5}{12}$	$1,19$	$-0,13$
5	6	$1,14$	$-0,0816$
$5\frac{1}{2}$	$6\frac{9}{16}$	$1,11$	$-0,0547$
6	$7\frac{1}{9}$	$1,09$	$-0,0384$
$6\frac{1}{2}$	$7\frac{13}{20}$	$1,07$	$-0,028$
7	$8\frac{2}{11}$	$1,06$	$-0,021$

Aufgabe (5)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^2+6x+8}{-9x-3}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2+6x+8=0$

$1x^2+6x+8=0$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm \sqrt{4}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-6 \pm 2}{2}$

$x_1 = \dfrac{-6+2}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-6-2}{2}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -4$

$\underline{x_1 = -4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$-9x-3=0$

$-9x-3=0 \qquad /+3$

$-9x=3 \qquad /:(-9)$

$x = \dfrac{3}{-9}$

$x = -\dfrac{1}{3}$

$\underline{x_3 = -\dfrac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+4)(x+2)}{-9(x+\frac{1}{3})}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

$f(x) = \dfrac{-\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{9}}{x+\frac{1}{3}}$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{llll}
(-\frac{1}{9}x^2 & -\frac{2}{3}x & -\frac{8}{9} &):(x+\frac{1}{3}) = -\frac{1}{9}x - \frac{17}{27} \\
-(-\frac{1}{9}x^2 & -\frac{1}{27}x) & & \\
\hline
 & -\frac{17}{27}x & -\frac{8}{9} & \\
 & -(-\frac{17}{27}x & -\frac{17}{81}) & \\
\hline
 & & -\frac{55}{81} &
\end{array}$$

$f(x) = -\dfrac{1}{9}x - \dfrac{17}{27} + \dfrac{-\frac{55}{81}}{x+\frac{1}{3}}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(-\frac{2}{9}x - \frac{2}{3})\cdot(x+\frac{1}{3}) - (-\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{9})\cdot 1}{(x+\frac{1}{3})^2}$

$= \dfrac{(-\frac{2}{9}x^2 - \frac{20}{27}x - \frac{2}{9}) - (-\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{9})}{(x+\frac{1}{3})^2}$

$= \dfrac{-\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + \frac{2}{3}}{(x+\frac{1}{3})^2}$

$= \frac{-\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + \frac{2}{3}}{(x+\frac{1}{3})^2}$

$f''(x) = \frac{(-\frac{2}{9}x - \frac{2}{27}) \cdot (x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}) - (-\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + \frac{2}{3}) \cdot (2x + \frac{2}{3})}{(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9})^2}$

$= \frac{(-\frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 - \frac{2}{27}x - 0,00823) - (-\frac{2}{9}x^3 - \frac{2}{9}x^2 + 1\frac{23}{81}x + \frac{4}{9})}{(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9})^2}$

$= \frac{-1\frac{29}{81}x - 0,453}{(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9})^2}$

$= \frac{-1\frac{29}{81}x - 0,453}{(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9})^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$-\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{9} = 0$

$x_4 = -4$; 1-fache Nullstelle

$x_5 = -2$; 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-4	$< x <$	-2	$< x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -4[\quad \cup \quad]-2; -\frac{1}{3}[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-4; -2[\quad \cup \quad]-\frac{1}{3}; \infty[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1 + \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2})}{x(-9 - \frac{3}{x})} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1 + \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2})}{x(-9 - \frac{3}{x})} = \infty$$

Schiefe Asymptote:$y = -\frac{1}{9}x - \frac{17}{27}$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}^+} \frac{-\frac{1}{9}(x+4)(x+2)}{(x+\frac{1}{3})} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}^-} \frac{-\frac{1}{9}(x+4)(x+2)}{(x+\frac{1}{3})} = \infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -\frac{1}{3}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \frac{-\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + \frac{2}{3}}{x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}} = 0$

$-\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + \frac{2}{3} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{+\frac{2}{27} \pm \sqrt{\left(-\frac{2}{27}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot \frac{2}{3}}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)}$$

$x_{1/2} = \frac{+\frac{2}{27} \pm \sqrt{0,302}}{-\frac{2}{9}}$

$x_{1/2} = \frac{\frac{2}{27} \pm 0,549}{-\frac{2}{9}}$

$x_1 = \frac{\frac{2}{27} + 0,549}{-\frac{2}{9}} \qquad x_2 = \frac{\frac{2}{27} - 0,549}{-\frac{2}{9}}$

$x_1 = -2,81 \qquad x_2 = 2,14$

$\underline{x_6 = -2,81; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_7 = 2,14; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-2,81) = 0,0899 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-2,81/-0,0432)}$

$f''(2,14) = -0,0899$

$f''(2,14) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(2,14/-1,14)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \frac{-\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{27}x + \frac{2}{3}}{x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}}$

Zaehler $= 0$

$\underline{x_8 = -2,81; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_9 = 2,14; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_10 = -\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-2,81$	$< x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x <$	$2,14$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-2,81; -\frac{1}{3}[\quad \cup \quad]-\frac{1}{3}; 2,14[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; -2,81[\quad \cup \quad]2,14; \infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \frac{-1\frac{29}{81}x - 0,453}{x^4 + 1\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{27}x + \frac{1}{81}}$

$Zaehler = 0$

$-1\frac{29}{81}x - 0,453 = 0 \qquad / + 0,453$

$-1\frac{29}{81}x = 0,453 \qquad / : \left(-1\frac{29}{81}\right)$

$x = \frac{0,453}{-1\frac{29}{81}}$

$x = -\frac{1}{3}$

$\underline{x_11 = -\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

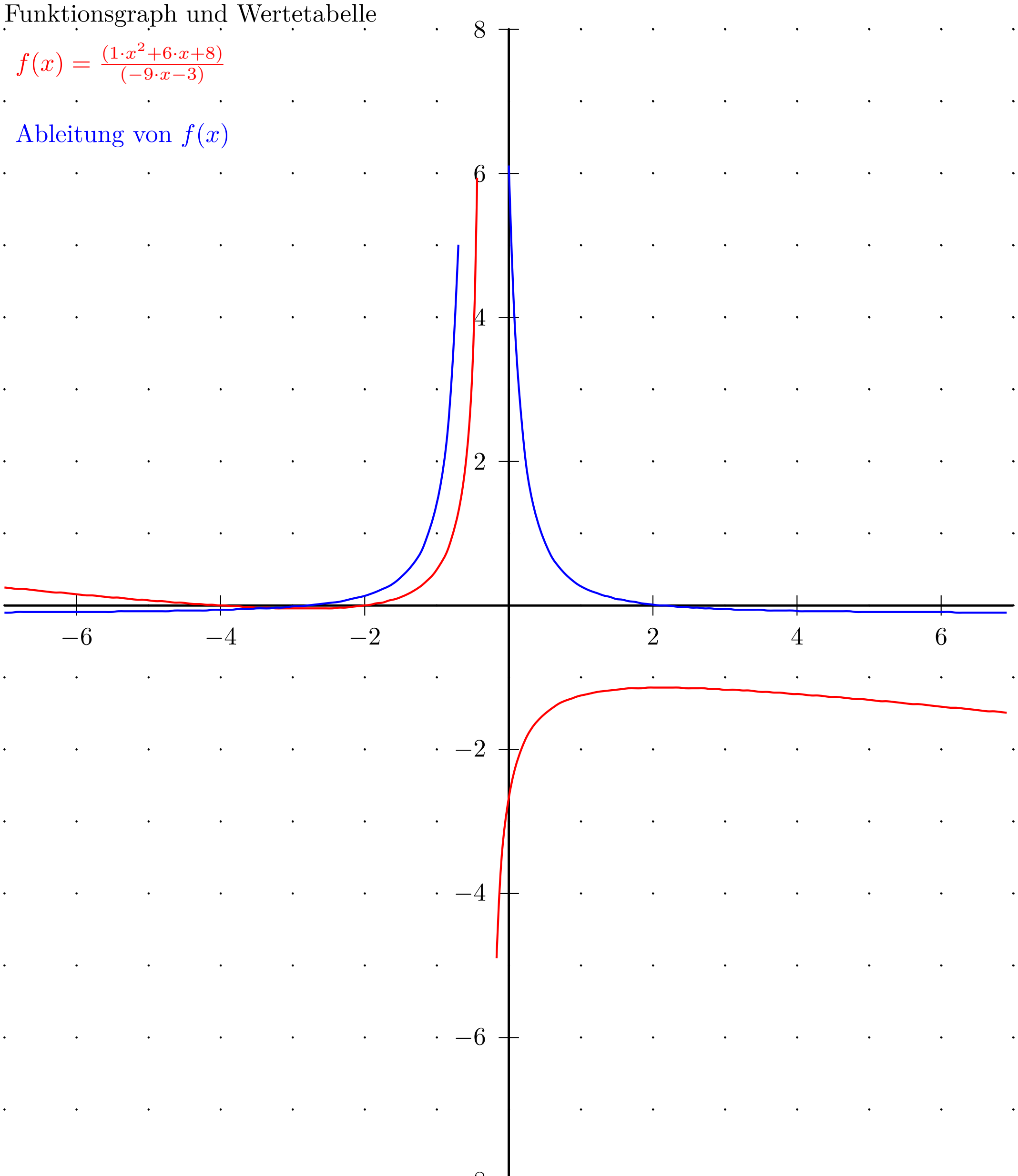
$\underline{x_12 = -\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\quad \cup \quad]-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$\frac{1}{4}$	$-0,0958$	$0,00458$
$-6\frac{1}{2}$	$\frac{15}{74}$	$-0,0933$	$0,00579$
-6	$\frac{8}{51}$	$-0,09$	$0,00746$
$-5\frac{1}{2}$	$\frac{7}{62}$	$-0,0857$	$0,00985$
-5	$\frac{1}{14}$	$-0,0799$	$0,0134$
$-4\frac{1}{2}$	$\frac{1}{30}$	$-0,072$	$0,0188$
-4	0	$-0,0606$	$0,0275$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{38}$	$-0,0434$	$0,0428$
-3	$-\frac{1}{24}$	$-0,0156$	$0,0716$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{26}$	$0,0335$	$0,134$
-2	0	$0,133$	$0,293$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{5}{42}$	$0,388$	$0,855$
-1	$\frac{1}{2}$	$1,42$	$4,59$
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	$24,6$	297
0	$-2\frac{2}{3}$	$6,02$	$-36,8$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-2\frac{2}{3}$	$6,02$	$-36,8$
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$0,867$	$-2,35$
1	$-1\frac{1}{4}$	$0,271$	$-0,573$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{6}$	$0,0909$	$-0,22$
2	$-1\frac{1}{7}$	$0,0136$	$-0,107$
$2\frac{1}{2}$	$-1\frac{5}{34}$	$-0,0265$	$-0,0597$
3	$-1\frac{1}{6}$	$-0,05$	$-0,0367$
$3\frac{1}{2}$	$-1\frac{9}{46}$	$-0,0649$	$-0,0241$
4	$-1\frac{3}{13}$	$-0,075$	$-0,0167$
$4\frac{1}{2}$	$-1,27$	$-0,082$	$-0,012$
5	$-1\frac{5}{16}$	$-0,0872$	$-0,00895$
$5\frac{1}{2}$	$-1\frac{5}{14}$	$-0,0912$	$-0,00684$
6	$-1\frac{23}{57}$	$-0,0942$	$-0,00535$
$6\frac{1}{2}$	$-1\frac{37}{82}$	$-0,0966$	$-0,00426$
7	$-1\frac{1}{2}$	$-0,0985$	$-0,00344$

Aufgabe (6)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{3x^3 - 10x^2 + 7x - 12}{x - 3}$
Zaehler faktorisieren:
$3x^3 - 10x^2 + 7x - 12 = 0$

$3x^3 - 10x^2 + 7x - 12 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:3

$$\begin{array}{llllll}
(3x^3 & -10x^2 & +7x & -12 &) : (x-3) = 3x^2 - x + 4 \\
-(3x^3 & -9x^2) & & & \\
\hline
 & -x^2 & +7x & -12 & \\
 & -(-x^2 & +3x) & & \\
\hline
 & & 4x & -12 & \\
 & & -(4x & -12) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$3x^2 - x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{-47}}{6}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_1 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x - 3 = 0$

$x - 3 = 0 \qquad / + 3$
$x = 3$
$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \dfrac{3(x^2 - \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3})(x - 3)}{(x - 3)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
• Term gekürzen
$f(x) = \dfrac{3(x^2 - \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3})}{1}$
• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 3x^2 - x + 4$
$f'(x) = 6x - 1$
$f''(x) = 6$
$F(x) = \displaystyle\int (3x^2 - x + 4)dx = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]3\frac{11}{12}, \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(3 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^2})$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [3 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [3 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 3 \cdot (-x)^2 - 1 \cdot (-x) + 4$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 3x^2 - x + 4 = 0$

$3x^2 - x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{-47}}{6}$
Diskriminante negativ keine Lösung

• Vorzeichentabelle:
kein Vorzeichenwechsel
$x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 6x - 1 = 0$

$6x - 1 = 0 \quad / + 1$
$6x = 1 \quad / : 6$
$x = \dfrac{1}{6}$
$x = \dfrac{1}{6}$
$x_1 = \dfrac{1}{6}$; 1-fache Nullstelle
$f''(\frac{1}{6}) = 6 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(\frac{1}{6}/3\frac{11}{12})$

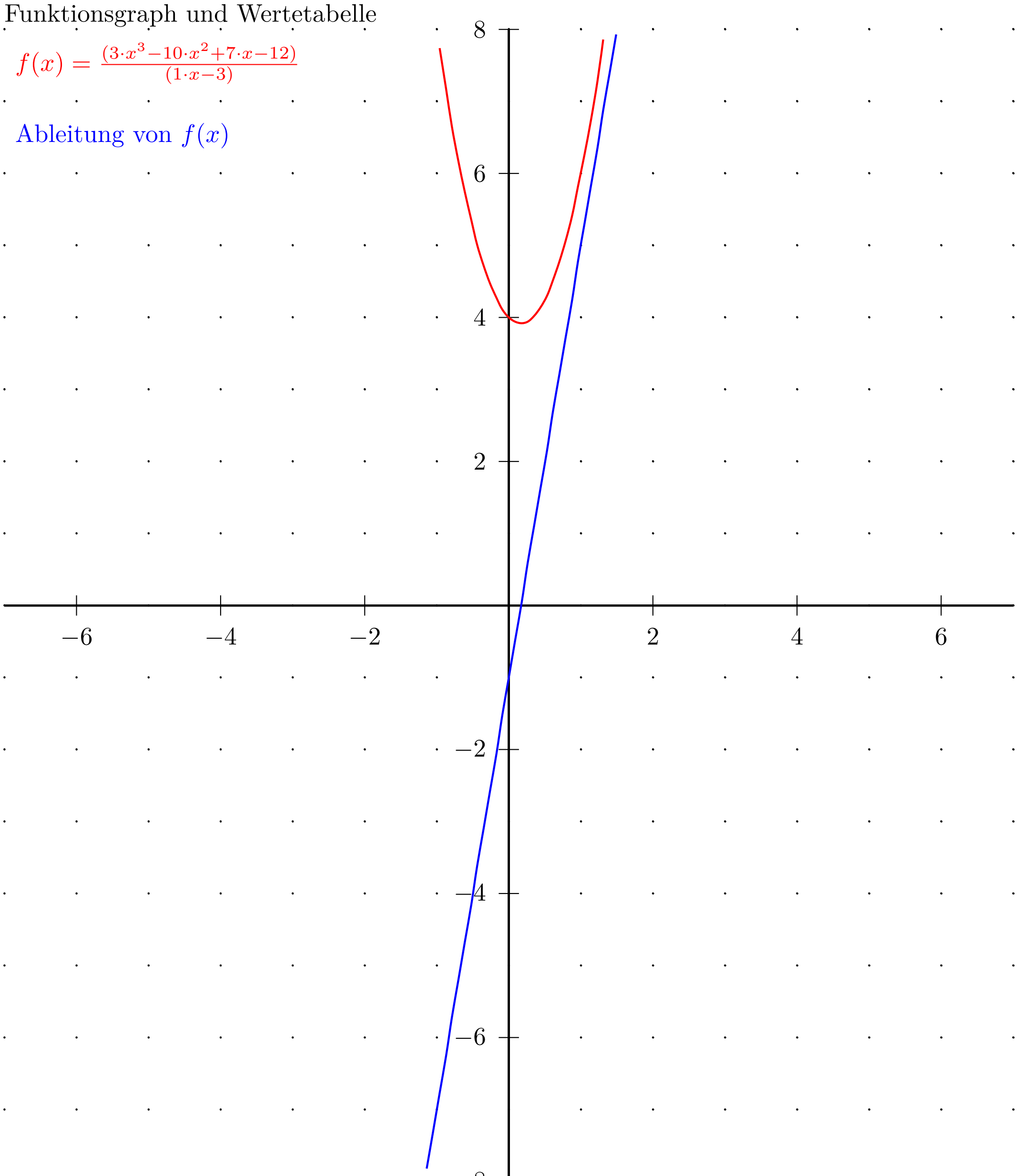
• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$\frac{1}{6}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]\frac{1}{6}; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend
$x \in]-\infty; \frac{1}{6}[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	158	-43	6
$-6\frac{1}{2}$	$137\frac{1}{4}$	-40	6
-6	118	-37	6
$-5\frac{1}{2}$	$100\frac{1}{4}$	-34	6
-5	84	-31	6
$-4\frac{1}{2}$	$69\frac{1}{4}$	-28	6
-4	56	-25	6
$-3\frac{1}{2}$	$44\frac{1}{4}$	-22	6
-3	34	-19	6
$-2\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{4}$	-16	6
-2	18	-13	6
$-1\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	-10	6
-1	8	-7	6
$-\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	-4	6
0	4	-1	6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	4	-1	6
$\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	2	6
1	6	5	6
$1\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4}$	8	6
2	14	11	6
$2\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{4}$	14	6
3	NaN	17	NaN
$3\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{4}$	20	6
4	48	23	6
$4\frac{1}{2}$	$60\frac{1}{4}$	26	6
5	74	29	6
$5\frac{1}{2}$	$89\frac{1}{4}$	32	6
6	106	35	6
$6\frac{1}{2}$	$124\frac{1}{4}$	38	6
7	144	41	6

Aufgabe (7)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{\frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2}{x-2}$

Zaehler faktorisieren:

$\frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 = 0$

$\frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 = 0$

$NumerischeSuche:$

$\underline{x_1 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x - 2 = 0$

$x - 2 = 0 \qquad / + 2$

$x = 2$

$\underline{x_4 = 2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{\frac{1}{3}(x+1)(x-2)(x-3)}{(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \frac{\frac{1}{3}(x+1)(x-3)}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = \frac{1}{3}(x+1)(x-3)$

$f'(x) = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

$f''(x) = \frac{2}{3}$

$F(x) = \int (\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1)dx = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =](-1\frac{1}{3}), \infty[$

• Grenzwerte:

$f(x) = x^2(\frac{1}{3} - \frac{\frac{2}{3}}{x} - \frac{1}{x^2})$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [\frac{1}{3} \cdot \infty^2] = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [\frac{1}{3} \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$f(-x) = \frac{1}{3} \cdot (-x)^2 - \frac{2}{3} \cdot (-x) - 1$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = 0$

$\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+\frac{2}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (-1)}}{2 \cdot \frac{1}{3}}$

$x_{1/2} = \dfrac{+\frac{2}{3} \pm \sqrt{1\frac{7}{9}}}{\frac{2}{3}}$

$x_{1/2} = \dfrac{\frac{2}{3} \pm 1\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$

$x_1 = \dfrac{\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \qquad x_2 = \dfrac{\frac{2}{3} - 1\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -1$

$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-1; 3[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3} = 0$

$\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3} = 0 \qquad / + \dfrac{2}{3}$

$\dfrac{2}{3}x = \dfrac{2}{3} \qquad / : \dfrac{2}{3}$

$x = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}$

$x = 1$

$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(1) = \dfrac{2}{3} > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(1/-1\frac{1}{3})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	1	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]1; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; 1[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

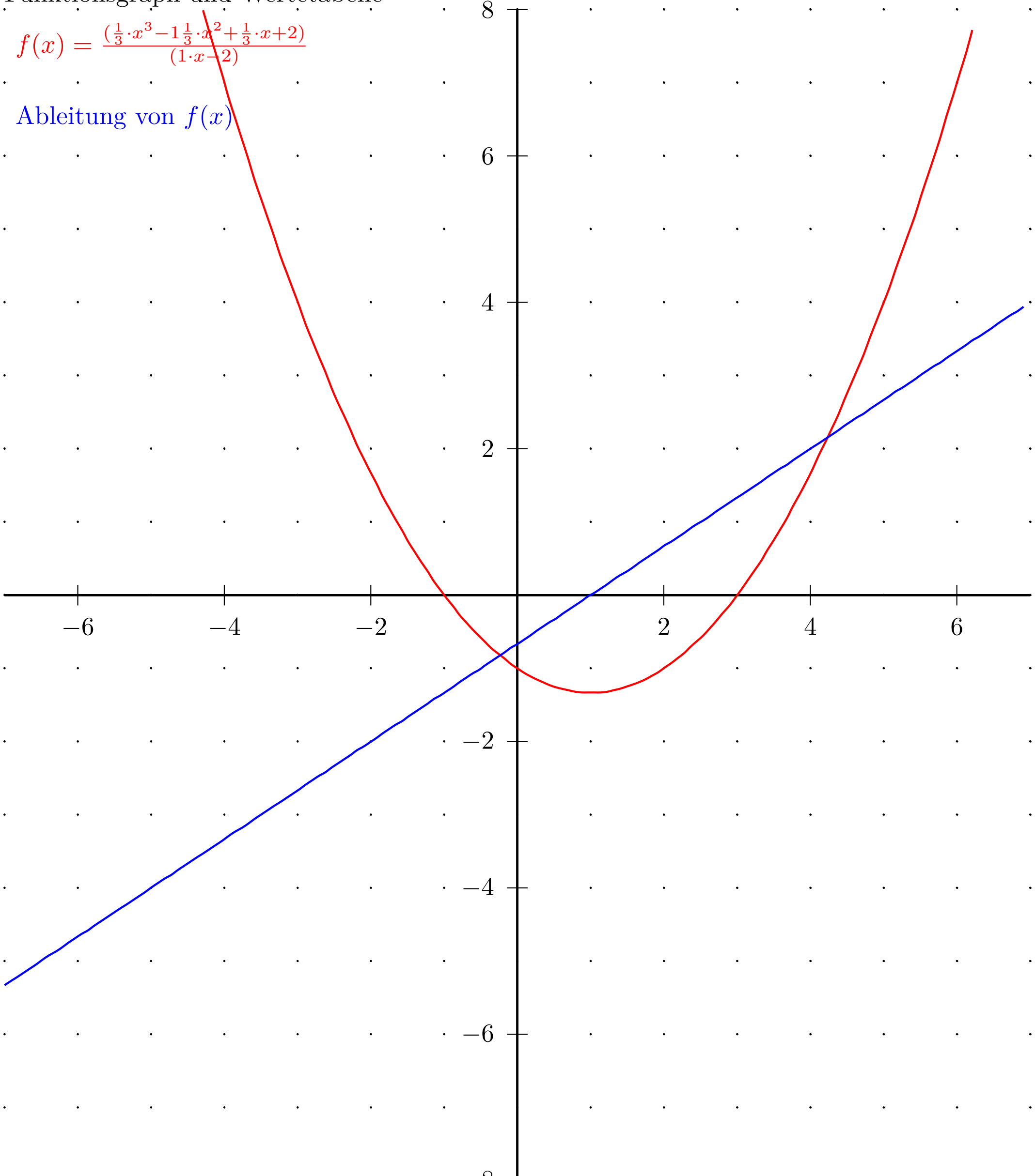
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$A = \displaystyle\int_{-1}^{3} \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1\right) dx = \left[\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x\right]_{-1}^{3}$

$= \left(\dfrac{1}{9} \cdot 3^3 - \dfrac{1}{3} \cdot 3^2 - 1 \cdot 3\right) - \left(\dfrac{1}{9} \cdot (-1)^3 - \dfrac{1}{3} \cdot (-1)^2 - 1 \cdot (-1)\right)$

$= (-3) - \left(\dfrac{5}{9}\right) = -3\dfrac{5}{9}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	20	$-5\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-6\frac{1}{2}$	$17\frac{5}{12}$	-5	$\frac{2}{3}$
-6	15	$-4\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-5\frac{1}{2}$	$12\frac{3}{4}$	$-4\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
-5	$10\frac{2}{3}$	-4	$\frac{2}{3}$
$-4\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	$-3\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
-4	7	$-3\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-3\frac{1}{2}$	$5\frac{5}{12}$	-3	$\frac{2}{3}$
-3	4	$-2\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	$-2\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
-2	$1\frac{2}{3}$	-2	$\frac{2}{3}$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-1\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
-1	0	$-1\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{12}$	-1	$\frac{2}{3}$
0	-1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
1	$-1\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	$+unendlich$	$\frac{2}{3}$	$-unendlich$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{12}$	1	$\frac{2}{3}$
3	0	$1\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$3\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$1\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
4	$1\frac{2}{3}$	2	$\frac{2}{3}$
$4\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
5	4	$2\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$5\frac{1}{2}$	$5\frac{5}{12}$	3	$\frac{2}{3}$
6	7	$3\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$6\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	$3\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
7	$10\frac{2}{3}$	4	$\frac{2}{3}$

Aufgabe (8)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x - 2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

$x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$
\begin{array}{lllll}
(x^3 & +x^2 & -4x & -4 &) : (x+1) = x^2 - 4 \\
-(x^3 & +x^2) & & & \\
\hline
 & -4x & -4 & & \\
 & & -(-4x & -4) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$1x^2 - 4 = 0 \qquad / + 4$

$1x^2 = 4 \qquad / : 1$

$x^2 = \dfrac{4}{1}$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x - 2 = 0$

$x - 2 = 0 \qquad / + 2$

$x = 2$

$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+2)(x+1)(x-2)}{(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{(x+2)(x+1)}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$

$f'(x) = 2x + 3$

$f''(x) = 2$

$F(x) = \int (x^2 + 3x + 2)dx = \frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =](-\frac{1}{4}), \infty[$

• Grenzwerte:

$f(x) = x^2(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2})$

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse

$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 + 3 \cdot (-x) + 2$

keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 + 3x + 2 = 0$

$1x^2 + 3x + 2 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm 1}{2}$
$x_1 = \dfrac{-3 + 1}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-3 - 1}{2}$
$x_1 = -1 \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-2; -1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x + 3 = 0$

$2x + 3 = 0 \qquad / - 3$
$2x = -3 \qquad / : 2$
$x = \dfrac{-3}{2}$
$x = -1\dfrac{1}{2}$
$\underline{x_3 = -1\frac{1}{2}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1\frac{1}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1\frac{1}{2} / -\frac{1}{4})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

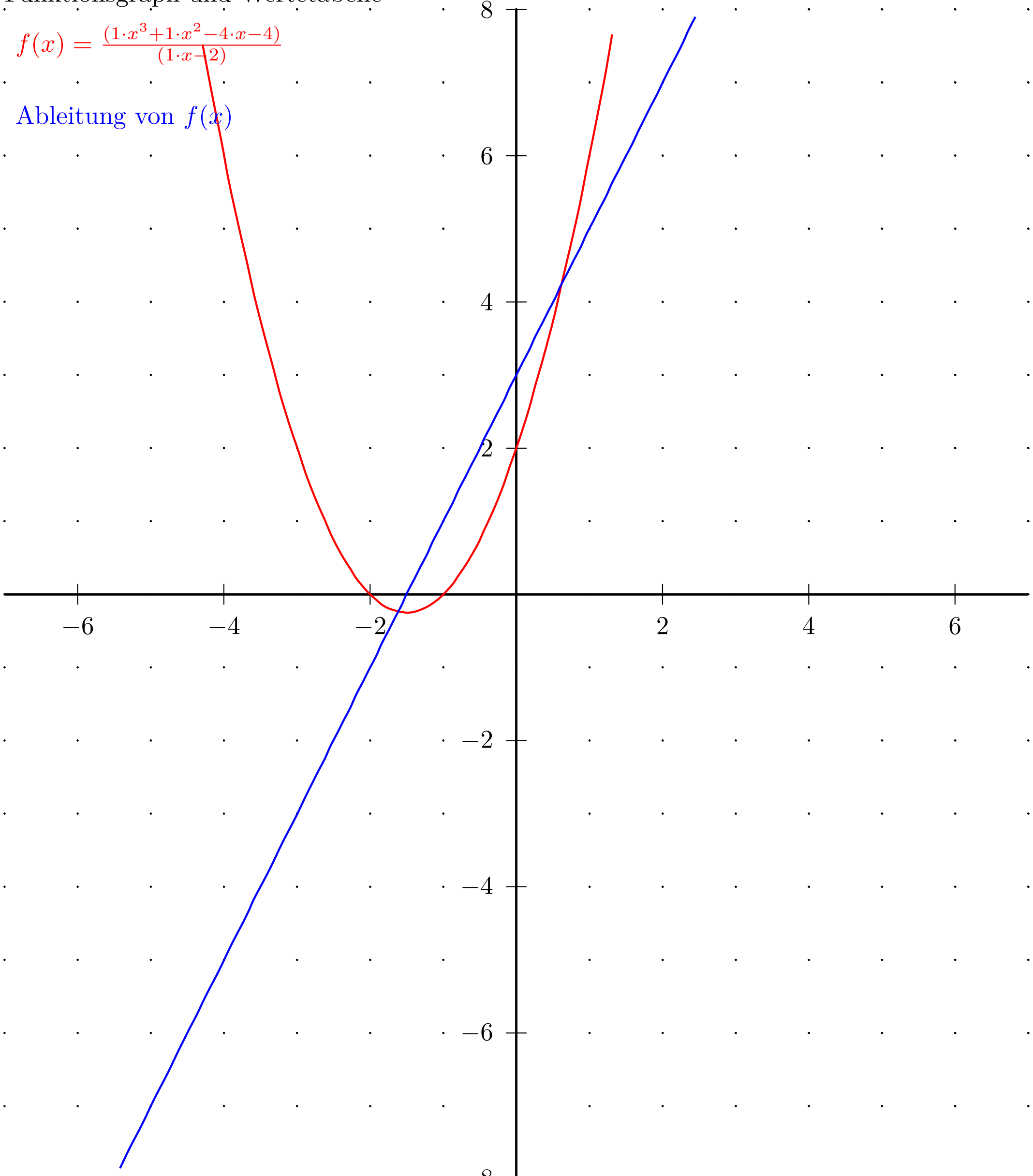
	$x <$	$-1\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-1\frac{1}{2}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; -1\frac{1}{2}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_{-2}^{-1} \left(x^2 + 3x + 2\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{-1}$$
$$= \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + 1\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + 1\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2)\right)$$
$$= \left(-\frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{6}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	30	-11	2
$-6\frac{1}{2}$	$24\frac{3}{4}$	-10	2
-6	20	-9	2
$-5\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{4}$	-8	2
-5	12	-7	2
$-4\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	-6	2
-4	6	-5	2
$-3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	-4	2
-3	2	-3	2
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-2	2
-2	0	-1	2
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	2
-1	0	1	2
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	2	2
0	2	3	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	2	3	2
$\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4	2
1	6	5	2
$1\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	6	2
2	NaN	7	NaN
$2\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{4}$	8	2
3	20	9	2
$3\frac{1}{2}$	$24\frac{3}{4}$	10	2
4	30	11	2
$4\frac{1}{2}$	$35\frac{3}{4}$	12	2
5	42	13	2
$5\frac{1}{2}$	$48\frac{3}{4}$	14	2
6	56	15	2
$6\frac{1}{2}$	$63\frac{3}{4}$	16	2
7	72	17	2

Aufgabe (9)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - x - 5}{x + 1}$
Zaehler faktorisieren:
$x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$

$x^3 + 5x^2 - x - 5 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & +5x^2 & -x & -5 \quad) : (x-1) = x^2 + 6x + 5 \\
-(x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & 6x^2 & -x & -5 \\
 & -(6x^2 & -6x) & \\
\hline
 & & 5x & -5 \\
 & & -(5x & -5) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$1x^2 + 6x + 5 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{-6 \pm 4}{2}$
$x_1 = \frac{-6 + 4}{2} \qquad x_2 = \frac{-6 - 4}{2}$
$x_1 = -1 \qquad x_2 = -5$
$\underline{x_1 = -5; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x + 1 = 0$

$x + 1 = 0 \qquad / - 1$
$x = -1$
$\underline{x_4 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{(x + 5)(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
• Term gekürzen
$f(x) = \frac{(x + 5)(x - 1)}{1}$
• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$
$f'(x) = 2x + 4$
$f''(x) = 2$
$F(x) = \int (x^2 + 4x - 5)dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x + c$
• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =](-9), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2})$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 + 4 \cdot (-x) - 5$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 + 4x - 5 = 0$

$1x^2 + 4x - 5 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{36}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 6}{2}$
$x_1 = \dfrac{-4+6}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-4-6}{2}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -5$
$\underline{x_1 = -5; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-5	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -5[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-5; 1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x + 4 = 0$

$2x + 4 = 0 \qquad / -4$
$2x = -4 \qquad / : 2$
$x = \dfrac{-4}{2}$
$x = -2$
$\underline{x_3 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-2/-9)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

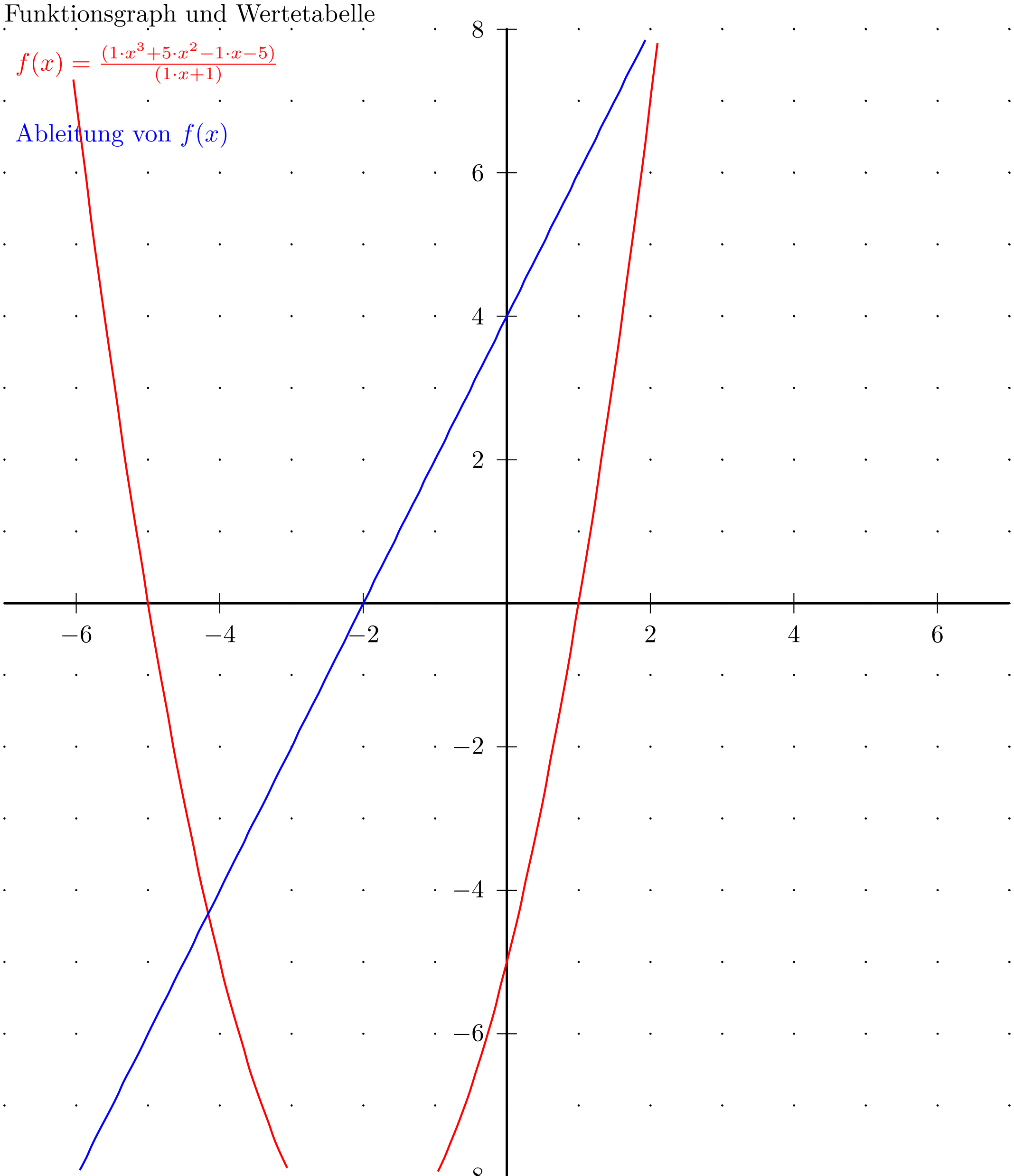
	$x <$	-2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_{-5}^{1} \left(x^2 + 4x - 5\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 5x\right]_{-5}^{1}$
$= \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-5)^3 + 2 \cdot (-5)^2 - 5 \cdot (-5)\right)$
$= \left(-2\frac{2}{3}\right) - \left(33\frac{1}{3}\right) = -36$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	16	-10	2
$-6\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	-9	2
-6	7	-8	2
$-5\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	-7	2
-5	0	-6	2
$-4\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{4}$	-5	2
-4	-5	-4	2
$-3\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{4}$	-3	2
-3	-8	-2	2
$-2\frac{1}{2}$	$-8\frac{3}{4}$	-1	2
-2	-9	0	2
$-1\frac{1}{2}$	$-8\frac{3}{4}$	1	2
-1	NaN	2	NaN
$-\frac{1}{2}$	$-6\frac{3}{4}$	3	2
0	-5	4	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-5	4	2
$\frac{1}{2}$	$-2\frac{3}{4}$	5	2
1	0	6	2
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	7	2
2	7	8	2
$2\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	9	2
3	16	10	2
$3\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{4}$	11	2
4	27	12	2
$4\frac{1}{2}$	$33\frac{1}{4}$	13	2
5	40	14	2
$5\frac{1}{2}$	$47\frac{1}{4}$	15	2
6	55	16	2
$6\frac{1}{2}$	$63\frac{1}{4}$	17	2
7	72	18	2

Aufgabe (10)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{3x^3 - x^2 - 3x + 1}{x - 1}$
Zaehler faktorisieren:
$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$

$3x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{llll}
(3x^3 & -x^2 & -3x & +1 \quad) : (x-1) = 3x^2 + 2x - 1 \\
-(3x^3 & -3x^2) & & \\
\hline
 & 2x^2 & -3x & +1 \\
 & -(2x^2 & -2x) & \\
\hline
 & & -x & +1 \\
 & & -(-x & +1) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$3x^2 + 2x - 1 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$
$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{16}}{6}$
$x_{1/2} = \dfrac{-2 \pm 4}{6}$
$x_1 = \dfrac{-2+4}{6} \qquad x_2 = \dfrac{-2-4}{6}$
$x_1 = \dfrac{1}{3} \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = \frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x - 1 = 0$

$x - 1 = 0 \qquad / + 1$
$x = 1$
$\underline{x_4 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \dfrac{3(x+1)(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(x-1)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
• Term gekürzen
$f(x) = \dfrac{3(x+1)(x-\frac{1}{3})}{1}$
• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 3(x+1)(x - \dfrac{1}{3})$
$f'(x) = 6x + 2$
$f''(x) = 6$
$F(x) = \displaystyle\int (3x^2 + 2x - 1)dx = x^3 + x^2 - x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =](-1\frac{1}{3}), \infty[$

• Grenzwerte:

$f(x) = x^2(3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [3 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [3 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 3 \cdot (-x)^2 + 2 \cdot (-x) - 1$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0$

$3x^2 + 2x - 1 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3}$
$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6}$
$x_{1/2} = \frac{-2 \pm 4}{6}$
$x_1 = \frac{-2+4}{6} \qquad x_2 = \frac{-2-4}{6}$
$x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = \frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]\frac{1}{3}; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$
$\underline{x \in]-1; \frac{1}{3}[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 6x + 2 = 0$

$6x + 2 = 0 \qquad / -2$
$6x = -2 \qquad / : 6$
$x = \frac{-2}{6}$
$x = -\frac{1}{3}$
$\underline{x_3 = -\frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-\frac{1}{3}) = 6 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-\frac{1}{3}/-1\frac{1}{3})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

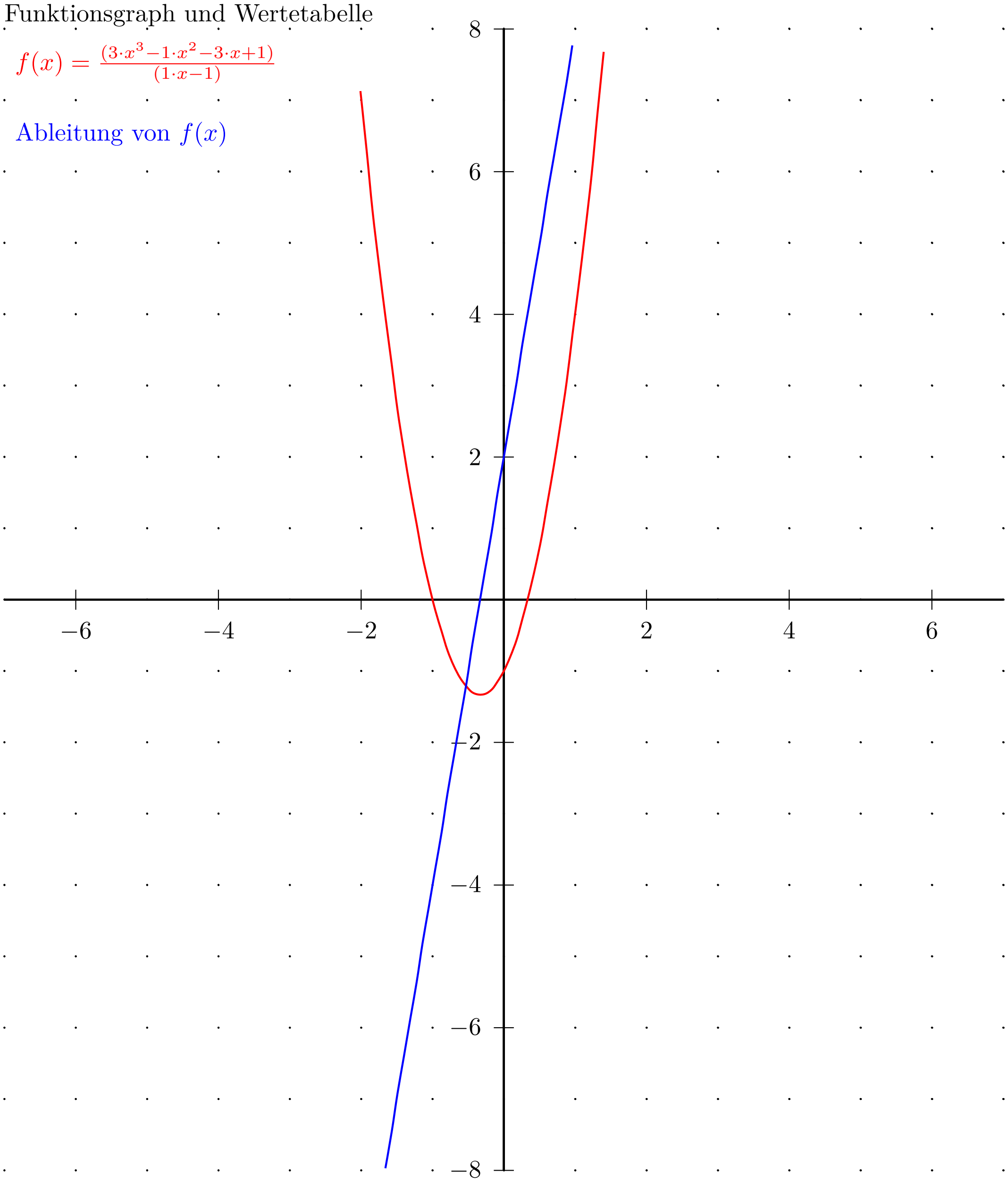
	$x <$	$-\frac{1}{3}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\frac{1}{3}; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$
$\underline{x \in]-\infty; -\frac{1}{3}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-1}^{\frac{1}{3}} \left(3x^2 + 2x - 1\right) dx = \left[x^3 + x^2 - x\right]_{-1}^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(1 \cdot \frac{1}{3}^3 + 1 \cdot \frac{1}{3}^2 - 1 \cdot \frac{1}{3}\right) - \left(1 \cdot (-1)^3 + 1 \cdot (-1)^2 - 1 \cdot (-1)\right)$$
$$= \left(-\frac{5}{27}\right) - (1) = -1\frac{5}{27}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	132	-40	6
$-6\frac{1}{2}$	$112\frac{3}{4}$	-37	6
-6	95	-34	6
$-5\frac{1}{2}$	$78\frac{3}{4}$	-31	6
-5	64	-28	6
$-4\frac{1}{2}$	$50\frac{3}{4}$	-25	6
-4	39	-22	6
$-3\frac{1}{2}$	$28\frac{3}{4}$	-19	6
-3	20	-16	6
$-2\frac{1}{2}$	$12\frac{3}{4}$	-13	6
-2	7	-10	6
$-1\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	-7	6
-1	0	-4	6
$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{4}$	-1	6
0	-1	2	6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-1	2	6
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	5	6
1	NaN	8	NaN
$1\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	11	6
2	15	14	6
$2\frac{1}{2}$	$22\frac{3}{4}$	17	6
3	32	20	6
$3\frac{1}{2}$	$42\frac{3}{4}$	23	6
4	55	26	6
$4\frac{1}{2}$	$68\frac{3}{4}$	29	6
5	84	32	6
$5\frac{1}{2}$	$100\frac{3}{4}$	35	6
6	119	38	6
$6\frac{1}{2}$	$138\frac{3}{4}$	41	6
7	160	44	6

Aufgabe (11)

•Funktion/Faktorisieren

$f\left(x\right)=\dfrac{x^3-8x+2}{x+2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^3-8x+2=0$

$x^3-8x+2=0$

$Numerische Suche:$

$\underline{x_1=-2,95;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2=0,252;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3=2,69;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x+2=0$

$x+2=0 \qquad /-2$

$x=-2$

$\underline{x_4=-2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f\left(x\right)=\dfrac{(x+2,95)(x-0,252)(x-2,69)}{(x+2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$f\left(x\right)=\dfrac{x^3-8x+2}{x+2}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{lllll}
(x^3 & & -8x & +2 &):(x+2)=x^2-2x-4\\
-(x^3 & +2x^2) & & & \\
\hline
 & -2x^2 & -8x & +2 & \\
 & -(-2x^2 & -4x) & & \\
\hline
 & & -4x & +2 & \\
 & & -(-4x & -8) & \\
\hline
 & & & 10 &
\end{array}$$

$f(x)=x^2-2x-4+\dfrac{10}{x+2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'\left(x\right)=\dfrac{(3x^2-8)\cdot(x+2)-(x^3-8x+2)\cdot 1}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{(3x^3+6x^2-8x-16)-(x^3-8x+2)}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{2x^3+6x^2-18}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{2x^3+6x^2-18}{(x+2)^2}$

$f''\left(x\right)=\dfrac{(6x^2+12x)\cdot(x^2+4x+4)-(2x^3+6x^2-18)\cdot(2x+4)}{(x^2+4x+4)^2}$

$=\dfrac{(6x^4+36x^3+72x^2+48x)-(4x^4+20x^3+24x^2-36x-72)}{(x^2+4x+4)^2}$

$=\dfrac{2x^4+16x^3+48x^2+84x+72}{(x^2+4x+4)^2}$

$=\dfrac{2x^4+16x^3+48x^2+84x+72}{(x^2+4x+4)^2}$

$= \dfrac{2(x^2+1,85x+4,33)(x+4,15)(x+2)}{(x+2)^4}$
$= \dfrac{2(x^2+1,85x+4,33)(x+4,15)}{(x+2)^3}$
$= \dfrac{2x^3+12x^2+24x+36}{x^3+6x^2+12x+8}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x^3-8x+2=0$
$x_5 = -2,95;$ 1-fache Nullstelle
$x_6 = 0,252;$ 1-fache Nullstelle
$x_7 = 2,69;$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-2,95$	$< x <$	-2	$< x <$	$0,252$	$< x <$	$2,69$	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;-2,95[\quad \cup \quad]-2;0,252[\quad \cup \quad]2,69;\infty[\quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-2,95;-2[\quad \cup \quad]0,252;2,69[\quad f(x) < 0$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1-\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^3})}{x(1+\frac{2}{x})} = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(1-\frac{8}{x^2}+\frac{2}{x^3})}{x(1+\frac{2}{x})} = \infty$$
$$\lim_{x\to-2^+} \frac{(x+2,95)(x-0,252)(x-2,69)}{(x+2)} = \infty$$
$$\lim_{x\to-2^-} \frac{(x+2,95)(x-0,252)(x-2,69)}{(x+2)} = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{2x^3+6x^2-18}{x^2+4x+4} = 0$

$2x^3+6x^2-18=0$
$NumerischeSuche:$
$x_8 = 1,43;$ 1-fache Nullstelle
$f''(1,43) = 2,5 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(1,43/-1,9)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \dfrac{2x^3+6x^2-18}{x^2+4x+4}$
Zaehler $= 0$
$x_9 = 1,43;$ 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$x_10 = -2;$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-2	$< x <$	$1,43$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]1,43;\infty[\quad f'(x) > 0 \quad$ streng monoton steigend

$x \in]-\infty;-2[\quad \cup \quad]-2;1,43[\quad f'(x) < 0 \quad$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{2x^3 + 12x^2 + 24x + 36}{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}$

$Zaehler = 0$

$2x^3 + 12x^2 + 24x + 36 = 0$

$Numerische Suche:$

$x_1 1 = -4,15;$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

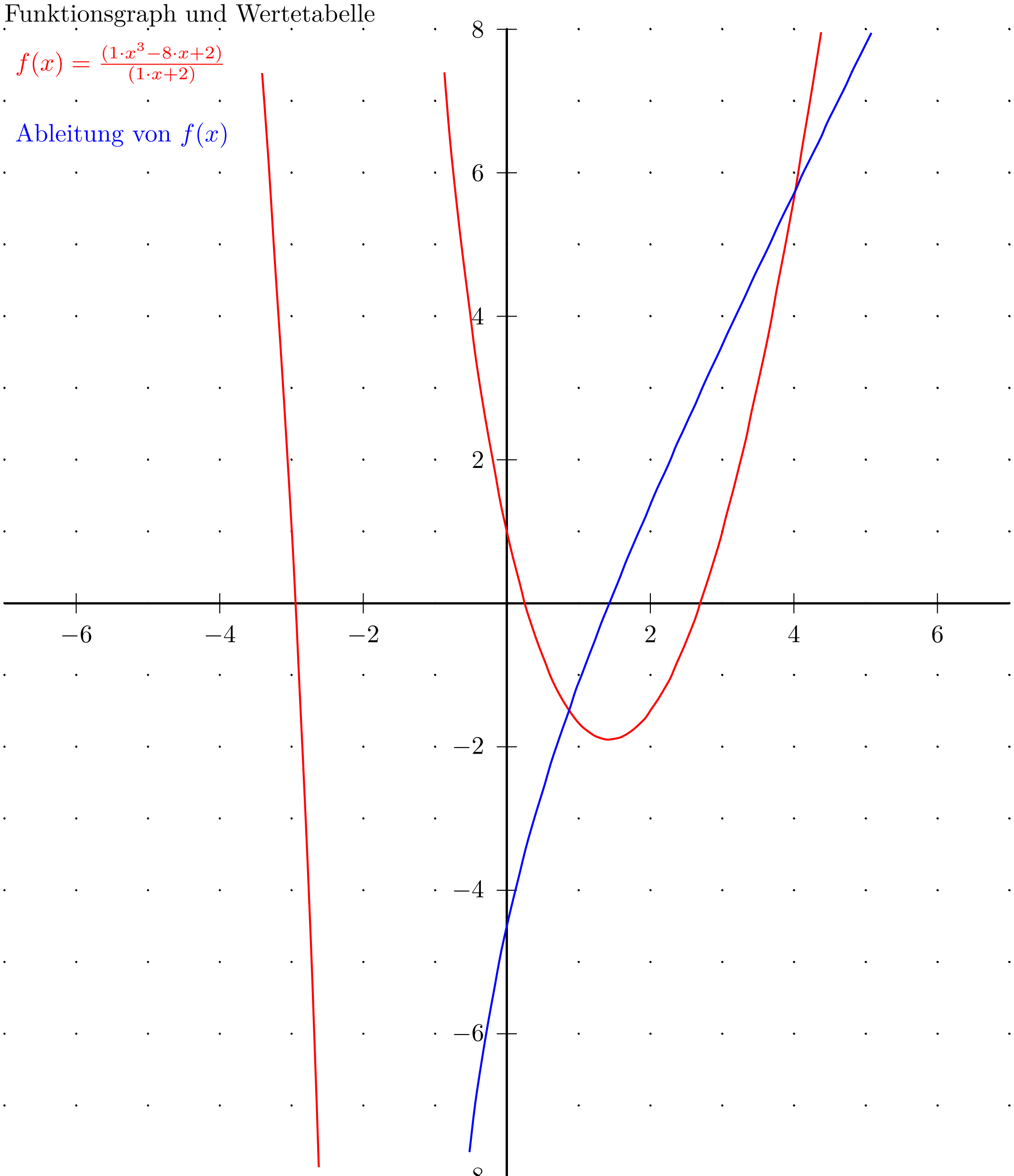
$x_1 2 = -2;$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$-4,15$	$< x <$	-2	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty;-4,15[\quad \cup \quad]-2;\infty[\quad f''(x) > 0 \quad$ linksgekrümmt

$x \in]-4,15;-2[\quad f''(x) < 0 \quad$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	57	$-16,4$	$1,84$
$-6\frac{1}{2}$	$49\frac{1}{36}$	$-15,5$	$1,78$
-6	$41\frac{1}{2}$	$-14,6$	$1,69$
$-5\frac{1}{2}$	$34\frac{11}{28}$	$-13,8$	$1,53$
-5	$27\frac{2}{3}$	$-13,1$	$1,26$
$-4\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{4}$	$-12,6$	$0,72$
-4	15	$-12,5$	$-0,5$
$-3\frac{1}{2}$	$8\frac{7}{12}$	$-13,4$	$-3,93$
-3	1	-18	-18
$-2\frac{1}{2}$	$-12\frac{3}{4}$	-47	-158
-2	$+unendlich$	$32647\frac{3}{49}$	$-unendlich$
$-1\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{4}$	-45	162
-1	9	-14	22
$-\frac{1}{2}$	$3\frac{11}{12}$	$-7,45$	$7,93$
0	1	$-4,5$	$4,5$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	$-4,5$	$4,5$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-2,6$	$3,28$
1	$-1\frac{2}{3}$	$-1,11$	$2,74$
$1\frac{1}{2}$	$-1\frac{25}{28}$	$0,184$	$2,47$
2	$-1\frac{1}{2}$	$1,37$	$2,31$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{19}{36}$	$2,51$	$2,22$
3	1	$3,6$	$2,16$
$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{44}$	$4,67$	$2,12$
4	$5\frac{2}{3}$	$5,72$	$2\frac{5}{54}$
$4\frac{1}{2}$	$8\frac{41}{52}$	$6,76$	$2,07$
5	$12\frac{3}{7}$	$7,8$	$2,06$
$5\frac{1}{2}$	$16\frac{7}{12}$	$8\frac{37}{45}$	$2,05$
6	$21\frac{1}{4}$	$9\frac{27}{32}$	$2,04$
$6\frac{1}{2}$	$26\frac{29}{68}$	$10,9$	$2,03$
7	$32\frac{1}{9}$	$11\frac{71}{81}$	$2,03$

Aufgabe (12)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2+1}$

Zaehler faktorisieren:

$2x^3 + 1 = 0$

$2x^3 + 1 = 02x^3 + 1 = 0 \qquad / -1$

$2x^3 = -1 \qquad / : 2$

$x^3 = \frac{-1}{2}$

$x = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$

$x = -0,794$

Polynomdivision:$(-0,794)$

$$\begin{array}{llll} (2x^3 & & & +1 \quad) : (x+0,794) = 2x^2 - 1,59x + 1,26 \\ -(2x^3 & +1,59x^2) & & \\ \hline & -1,59x^2 & & +1 \\ & -(-1,59x^2 & -1,26x) & \\ \hline & & 1,26x & +1 \\ & & -(1,26x & +1) \\ \hline & & & -0 \end{array}$$

$2x^2 - 1,59x + 1,26 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+1,59 \pm \sqrt{(-1,59)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1,26}}{2 \cdot 2}$

$x_{1/2} = \frac{+1,59 \pm \sqrt{-7,56}}{4}$

Diskriminante negativ keine Lösung

$\underline{x_1 = -0,794; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 + 1 = 0$

$1x^2 + 1 = 0 \qquad / -1$

$1x^2 = -1 \qquad / : 1$

$x^2 = \frac{-1}{1}$

keine Lösung

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{2(x^2 - 0,794x + 0,63)(x+0,794)}{(x^2+1)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2+1}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{lll} (2x^3 & & +1 \quad) : (x^2+1) = 2x \\ -(2x^3 & +2x) & \\ \hline & -2x & +1 \end{array}$$

$f(x) = 2x + \frac{-2x+1}{x^2+1}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{6x^2 \cdot (x^2+1) - (2x^3+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$

$= \frac{(6x^4 + 6x^2) - (4x^4 + 2x)}{(x^2+1)^2}$
$= \frac{2x^4 + 6x^2 - 2x}{(x^2+1)^2}$
$= \frac{2x^4 + 6x^2 - 2x}{(x^2+1)^2}$
$f''(x) = \frac{(8x^3 + 12x - 2) \cdot (x^4 + 2x^2 + 1) - (2x^4 + 6x^2 - 2x) \cdot (4x^3 + 4x)}{(x^4 + 2x^2 + 1)^2}$
$= \frac{(8x^7 + 28x^5 - 2x^4 + 32x^3 - 4x^2 + 12x - 2) - (8x^7 + 32x^5 - 8x^4 + 24x^3 - 8x^2)}{(x^4 + 2x^2 + 1)^2}$
$= \frac{-4x^5 + 6x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 12x - 2}{(x^4 + 2x^2 + 1)^2}$
$= \frac{-4x^5 + 6x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 12x - 2}{(x^4 + 2x^2 + 1)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$2x^3 + 1 = 0$
$\underline{x_2 = -0,794; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	$-0,794$	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-0,794; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -0,794[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3(2 + \frac{1}{x^3})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^3(2 + \frac{1}{x^3})}{x^2(1 + \frac{1}{x^2})} = \infty$
Schiefe Asymptote:$y = 2x$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{2x^4 + 6x^2 - 2x}{x^4 + 2x^2 + 1} = 0$
$x(2x^3 + 6x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad 2x^3 + 6x - 2 = 0$
$2x^3 + 6x - 2 = 0$
$NumerischeSuche:$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 0,322; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = -2$
$f''(0) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(0/1)}$
$f''(0,322) = 1,75 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0,322/0,967)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{2x^4 + 6x^2 - 2x}{x^4 + 2x^2 + 1}$

Zaehler = 0
$x_5 = 0;$ 1-fache Nullstelle
$x_6 = 0,322;$ 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	0	$< x <$	$0,322$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0,322; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]0; 0,322[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{-4x^5 + 6x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 12x - 2}{x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1}$$

$Zaehler = 0$

$Numerische Suche:$
$x_7 = -1,24;$ 1-fache Nullstelle
$x_8 = 0,156;$ 1-fache Nullstelle
$x_9 = 2,59;$ 1-fache Nullstelle

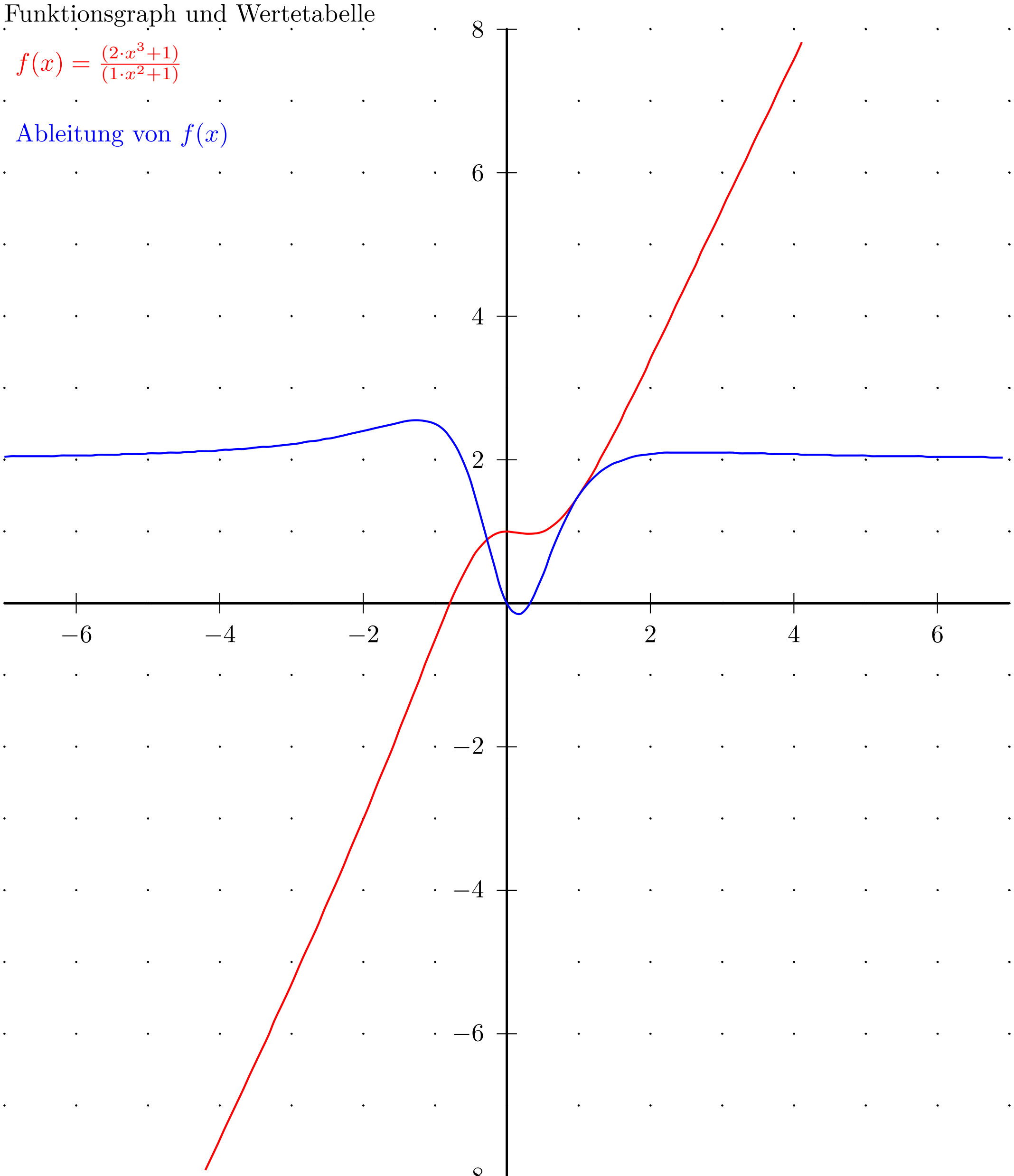
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

	$x <$	$-1,24$	$< x <$	$0,156$	$< x <$	$2,59$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in]-\infty; -1,24[\quad \cup \quad]0,156; 2,59[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]-1,24; 0,156[\quad \cup \quad]2,59; \infty[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-13\frac{7}{10}$	$2,04$	$0,0126$
$-6\frac{1}{2}$	$-12,7$	$2,05$	$0,0157$
-6	$-11\frac{24}{37}$	$2,06$	$0,0199$
$-5\frac{1}{2}$	$-10,6$	$2,07$	$0,0255$
-5	$-9\frac{15}{26}$	$2,09$	$0,0335$
$-4\frac{1}{2}$	$-8\frac{9}{17}$	$2,11$	$0,0448$
-4	$-7\frac{8}{17}$	$2,13$	$0,0615$
$-3\frac{1}{2}$	$-6\frac{21}{53}$	$2,17$	$0,0864$
-3	$-5\frac{3}{10}$	$2,22$	$0,124$
$-2\frac{1}{2}$	$-4\frac{5}{29}$	$2,29$	$0,178$
-2	-3	$2,4$	$0,24$
$-1\frac{1}{2}$	$-1\frac{10}{13}$	$2,52$	$0,204$
-1	$-\frac{1}{2}$	$2,5$	$-0,5$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$1,68$	$-3,07$
0	1	$0,000612$	-2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	$0,000612$	-2
$\frac{1}{2}$	1	$0,4$	$2,56$
1	$1\frac{1}{2}$	$1,5$	$1,5$
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{5}{13}$	$1,95$	$0,466$
2	$3\frac{2}{5}$	$2,08$	$0,112$
$2\frac{1}{2}$	$4\frac{13}{29}$	$2,1$	$0,00788$
3	$5\frac{1}{2}$	$2,1$	$-0,02$
$3\frac{1}{2}$	$6\frac{29}{53}$	$2,09$	$-0,0249$
4	$7\frac{10}{17}$	$2,08$	$-0,0232$
$4\frac{1}{2}$	$8\frac{53}{85}$	$2,07$	$-0,0199$
5	$9\frac{17}{26}$	$2,06$	$-0,0166$
$5\frac{1}{2}$	$10\frac{17}{25}$	$2,05$	$-0,0138$
6	$11\frac{26}{37}$	$2,04$	$-0,0114$
$6\frac{1}{2}$	$12,7$	$2,04$	$-0,00951$
7	$13\frac{37}{50}$	$2,03$	$-0,00797$

Aufgabe (13)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - x - 12}$

Zaehler faktorisieren:

$x^3 + x = 0$

$x(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \wedge \quad x^2 + 1 = 0$

$1x^2 + 1 = 0 \qquad / - 1$

$1x^2 = -1 \qquad / : 1$

$x^2 = \frac{-1}{1}$

keine Lösung

$\underline{x_1 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 - x - 12 = 0$

$1x^2 - x - 12 = 0$

$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{49}}{2}$

$x_{1/2} = \frac{1 \pm 7}{2}$

$x_1 = \frac{1 + 7}{2} \qquad x_2 = \frac{1 - 7}{2}$

$x_1 = 4 \qquad x_2 = -3$

$\underline{x_2 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 4; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \frac{x(x^2 + 1)}{(x + 3)(x - 4)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 4\}$

$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - x - 12}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{llllll}
(x^3 & & +x & &) : (x^2 - x - 12) = x + 1 \\
-(x^3 & -x^2 & -12x) & & \\
\hline
 & x^2 & +13x & & \\
 & -(x^2 & -x & -12) & \\
\hline
 & & 14x & +12 &
\end{array}$$

$f(x) = x + 1 + \frac{14x + 12}{x^2 - x - 12}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \frac{(3x^2 + 1) \cdot (x^2 - x - 12) - (x^3 + x) \cdot (2x - 1)}{(x^2 - x - 12)^2}$

$= \frac{(3x^4 - 3x^3 - 35x^2 - x - 12) - (2x^4 - x^3 + 2x^2 - x)}{(x^2 - x - 12)^2}$

$= \frac{x^4 - 2x^3 - 37x^2 - 12}{(x^2 - x - 12)^2}$

$= \frac{x^4 - 2x^3 - 37x^2 - 12}{(x^2 - x - 12)^2}$

$$f''(x) = \frac{(4x^3-6x^2-74x)\cdot(x^4-2x^3-23x^2+24x+144)-(x^4-2x^3-37x^2-12)\cdot(4x^3-6x^2-46x+24)}{(x^4-2x^3-23x^2+24x+144)^2}$$
$$= \frac{(4x^7-14x^6-154x^5+382x^4+2,13\cdot10^3x^3-2,64\cdot10^3x^2-1,07\cdot10^4x)-(4x^7-14x^6-182x^5+338x^4+1,61\cdot10^3x^3-816}{(x^4-2x^3-23x^2+24x+144)^2}$$
$$= \frac{28x^5+44x^4+528x^3-1,82\cdot10^3x^2-1,12\cdot10^4x+288}{(x^4-2x^3-23x^2+24x+144)^2}$$
$$= \frac{28x^5+44x^4+528x^3-1,82\cdot10^3x^2-1,12\cdot10^4x+288}{(x^4-2x^3-23x^2+24x+144)^2}$$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x^3 + x = 0$
$\underline{x_4 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	0	$< x <$	4	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-3;0[\quad \cup \quad]4;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]0;4[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2})} = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(1+\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x}-\frac{12}{x^2})} = \infty$$
Schiefe Asymptote:$y = x + 1$
$$\lim_{x\to-3^+} \frac{x(x^2+1)}{(x+3)(x-4)} = \infty$$
$$\lim_{x\to-3^-} \frac{x(x^2+1)}{(x+3)(x-4)} = -\infty$$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -3$
$$\lim_{x\to4^+} \frac{x(x^2+1)}{(x+3)(x-4)} = \infty$$
$$\lim_{x\to4^-} \frac{x(x^2+1)}{(x+3)(x-4)} = -\infty$$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 4$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$$f'(x) = \frac{x^4-2x^3-37x^2-12}{x^4-2x^3-23x^2+24x+144} = 0$$
$x^4 - 2x^3 - 37x^2 - 12$
$NumerischeSuche:$

$\underline{x_5 = -5,2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 7,18; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-5,2) = -0,195$
$f''(-5,2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-5,2/-7,2)}$

$f''(7,18) = 0,125 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(7,18/11,7)$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 - 37x^2 - 12}{x^4 - 2x^3 - 23x^2 + 24x + 144}$

Zaehler = 0

$x_7 = -5,2;$ 1-fache Nullstelle

$x_8 = 7,18;$ 1-fache Nullstelle

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_9 = -3;$ 1-fache Nullstelle

$x_10 = 4;$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	$-5,2$	$< x <$	-3	$< x <$	4	$< x <$	$7,18$	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]-\infty; -5,2[\quad \cup \quad]7,18; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend

$x \in]-5,2; -3[\quad \cup \quad]-3; 4[\quad \cup \quad]4; 7,18[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Kruemmung

$$f''(x) = \frac{28x^5 + 44x^4 + 528x^3 - 1,82 \cdot 10^3x^2 - 1,12 \cdot 10^4x + 288}{x^8 - 4x^7 - 42x^6 + 140x^5 + 721x^4 - 1,68 \cdot 10^3x^3 - 6,05 \cdot 10^3x^2 + 6,91 \cdot 10^3x + 2,07 \cdot 10^4}$$

$Zaehler = 0$

$NumerischeSuche:$

$x_11 = -3;$ 1-fache Nullstelle

$x_12 = 0,0256;$ 1-fache Nullstelle

$x_13 = 4;$ 1-fache Nullstelle

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

$x_14 = -3;$ 1-fache Nullstelle

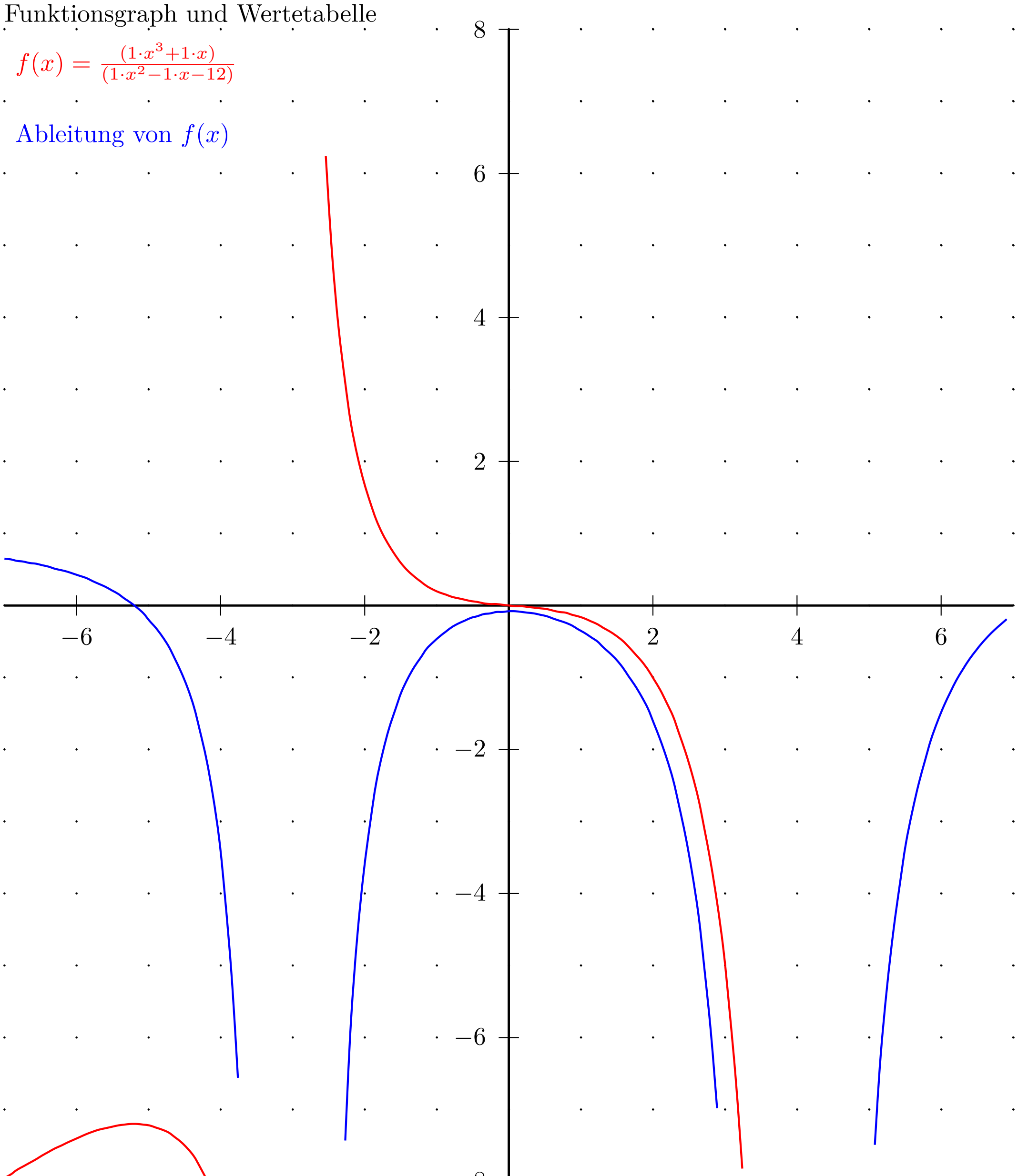
$x_15 = 4;$ 1-fache Nullstelle

	$x <$	-3	$< x <$	-3	$< x <$	$0,0256$	$< x <$	4	$< x <$	4	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$-$

$x \in]-\infty; -3[\quad \cup \quad]-3; -3[\quad \cup \quad]-3; 0,0256[\quad f''(x) > 0$ linksgekrümmt

$x \in]0,0256; 4[\quad \cup \quad]4; 4[\quad \cup \quad]4; \infty[\quad f''(x) < 0$ rechtsgekrümmt

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-7\frac{21}{22}$	$0,652$	$-0,149$
$-6\frac{1}{2}$	$-7,65$	$0,562$	$-0,217$
-6	$-7\frac{2}{5}$	$0,427$	$-0,337$
$-5\frac{1}{2}$	$-7\frac{9}{38}$	$0,207$	$-0,571$
-5	$-7\frac{2}{9}$	$-0,191$	$-1,1$
$-4\frac{1}{2}$	$-7\frac{1}{2}$	$-1,04$	$-2,57$
-4	$-8\frac{1}{2}$	$-3,44$	$-8,61$
$-3\frac{1}{2}$	$-12\frac{11}{30}$	$-16,3$	$-68,7$
-3	$-unendlich$	$1,4\cdot 10^4$	$+unendlich$
$-2\frac{1}{2}$	$5\frac{15}{26}$	$-16,4$	$68,6$
-2	$1\frac{2}{3}$	$-3,56$	$8,48$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{13}{22}$	$-1,23$	$2,42$
-1	$\frac{1}{5}$	$-0,46$	$0,916$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$	$-0,165$	$0,335$
0	0	$-0,0834$	$0,0139$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	0	$-0,0834$	$0,0139$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{98}$	$-0,143$	$-0,253$
1	$-\frac{1}{6}$	$-0,347$	$-0,586$
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{13}{30}$	$-0,766$	$-1\frac{13}{87}$
2	-1	$-1,6$	$-2,36$
$2\frac{1}{2}$	$-2\frac{13}{66}$	$-3,46$	$-5,71$
3	-5	$-8,84$	$-19,4$
$3\frac{1}{2}$	$-14\frac{7}{26}$	-38	-156
4	$+unendlich$	$3,17\cdot 10^4$	$-unendlich$
$4\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{2}$	-38	156
5	$16\frac{1}{4}$	$-8,78$	$19,5$
$5\frac{1}{2}$	$13,5$	$-3,38$	$5,77$
6	$12\frac{1}{3}$	$-1,48$	$2,44$
$6\frac{1}{2}$	$11,8$	$-0,602$	$1,25$
7	$11\frac{2}{3}$	$-0,122$	$0,728$

Aufgabe (14)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^2 - 4}$
Zaehler faktorisieren:
$x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$1u^2 - 3u - 4 = 0$

$u_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$
$u_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{25}}{2}$
$u_{1/2} = \frac{3 \pm 5}{2}$
$u_1 = \frac{3+5}{2} \qquad u_2 = \frac{3-5}{2}$
$u_1 = 4 \qquad u_2 = -1$
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$
$x^2 = -1x = \pm\sqrt{-1}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x^2 - 4 = 0$

$1x^2 - 4 = 0 \qquad / + 4$
$1x^2 = 4 \qquad / : 1$
$x^2 = \frac{4}{1}$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_3 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{(x+2)(x^2+1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$
• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
• Term gekürzen
$f(x) = \frac{(x^2+1)}{1}$
• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$
$f'(x) = 2x$
$f''(x) = 2$
$F(x) = \int (x^2 - 1)dx = \frac{1}{3}x^3 - x + c$
• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =](-1), \infty[$

• Grenzwerte:

$f(x) = x^2(1 - \frac{1}{x^2})$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 - 1$
$f(-x) = 1 \cdot x^2 - 1$
$f(-x) = f(x) \rightarrow$ Symmetrie zur y-Achse:

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 - 1 = 0$

$1x^2 - 1 = 0 \qquad / + 1$
$1x^2 = 1 \qquad / : 1$
$x^2 = \frac{1}{1}$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_1 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-1	$< x <$	1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-\infty; -1[\quad \cup \quad]1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-1; 1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x = 0$
$x = 0 \Rightarrow x = 0$
$\underline{x_3 = 0; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(0/-1)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

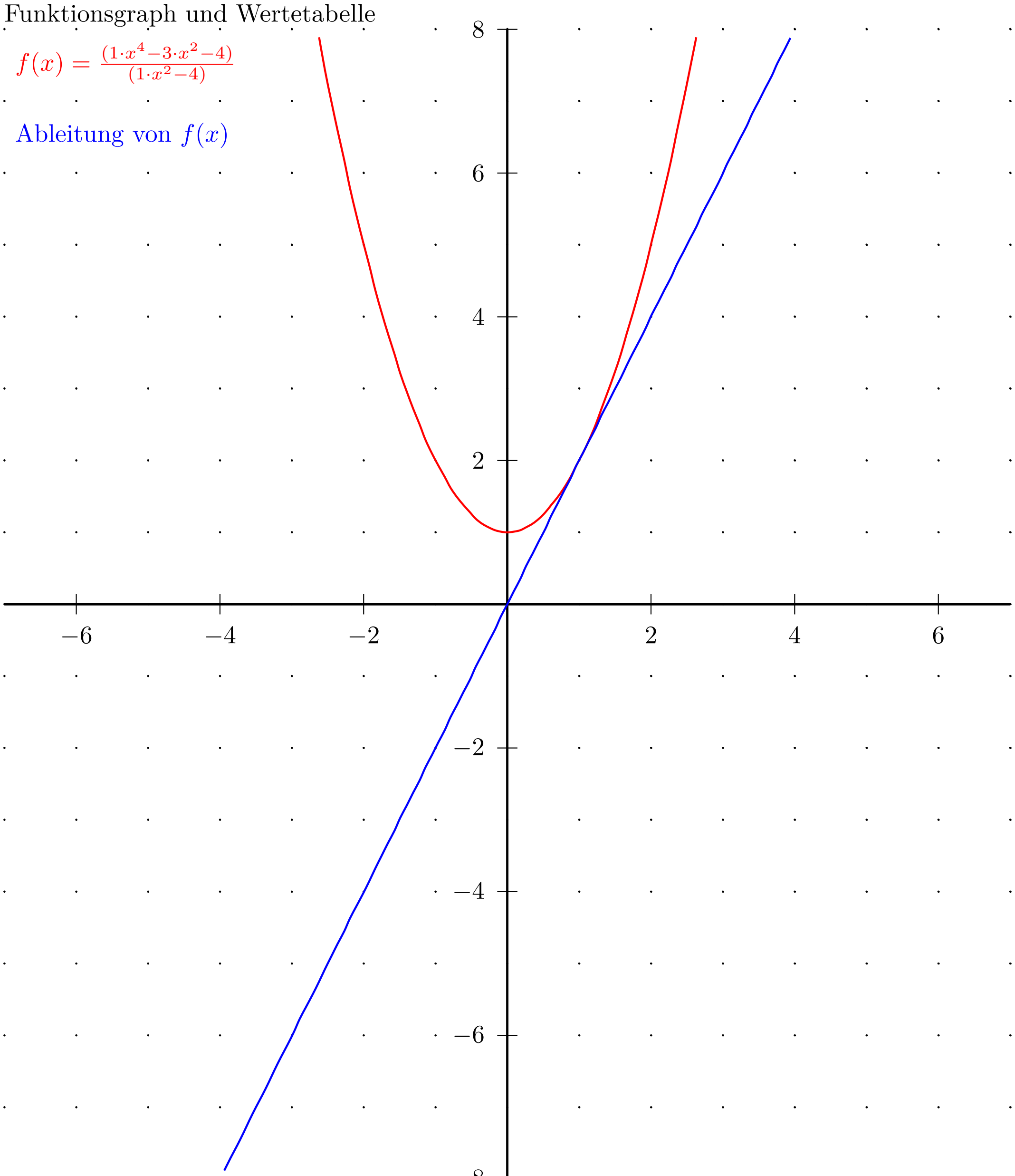
	$x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - 1\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-1}^{1}$
$= \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 - 1 \cdot 1\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 - 1 \cdot (-1)\right)$
$= \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{2}{3}\right) = -1\frac{1}{3}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	50	-14	2
$-6\frac{1}{2}$	$43\frac{1}{4}$	-13	2
-6	37	-12	2
$-5\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{4}$	-11	2
-5	26	-10	2
$-4\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{4}$	-9	2
-4	17	-8	2
$-3\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{4}$	-7	2
-3	10	-6	2
$-2\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{4}$	-5	2
-2	NaN	-4	NaN
$-1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	-3	2
-1	2	-2	2
$-\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	-1	2
0	1	0	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	1	0	2
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	1	2
1	2	2	2
$1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{4}$	3	2
2	NaN	4	NaN
$2\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{4}$	5	2
3	10	6	2
$3\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{4}$	7	2
4	17	8	2
$4\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{4}$	9	2
5	26	10	2
$5\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{4}$	11	2
6	37	12	2
$6\frac{1}{2}$	$43\frac{1}{4}$	13	2
7	50	14	2

Aufgabe (15)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2}$
Zaehler faktorisieren:
$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$u = x^2 \qquad u^2 = x^4$
$1u^2 - 5u + 4 = 0$

$u_{1/2} = \frac{+5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$
$u_{1/2} = \frac{+5 \pm \sqrt{9}}{2}$
$u_{1/2} = \frac{5 \pm 3}{2}$
$u_1 = \frac{5+3}{2} \qquad u_2 = \frac{5-3}{2}$
$u_1 = 4 \qquad u_2 = 1$
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$
$x^2 = 1$
$x = \pm\sqrt{1}$
$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x^2 - 3x + 2 = 0$

$1x^2 - 3x + 2 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{+3 \pm \sqrt{1}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{3 \pm 1}{2}$
$x_1 = \frac{3+1}{2} \qquad x_2 = \frac{3-1}{2}$
$x_1 = 2 \qquad x_2 = 1$
$\underline{x_5 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_6 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)}$
• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$
• Term gekürzen
$f(x) = \frac{(x+2)(x+1)}{1}$
• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$

$f'(x) = 2x + 3$
$f''(x) = 2$
$F(x) = \int (x^2 + 3x + 2)dx = \frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\mathbb{W} =](-\frac{1}{4}), \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2})$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 + 3 \cdot (-x) + 2$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 + 3x + 2 = 0$

$1x^2 + 3x + 2 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2}$
$x_{1/2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$
$x_1 = \frac{-3 + 1}{2}$ $x_2 = \frac{-3 - 1}{2}$
$x_1 = -1$ $x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x <$	-1	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\;\cup\;]-1; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-2; -1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x + 3 = 0$

$2x + 3 = 0 \qquad / - 3$
$2x = -3 \qquad / : 2$
$x = \frac{-3}{2}$
$x = -1\frac{1}{2}$
$\underline{x_3 = -1\frac{1}{2};\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-1\frac{1}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-1\frac{1}{2}/-\frac{1}{4})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$-1\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-1\frac{1}{2};\infty[$	$f'(x) > 0$	streng monoton steigend
$x \in]-\infty;-1\frac{1}{2}[$	$f'(x) < 0$	streng monoton fallend

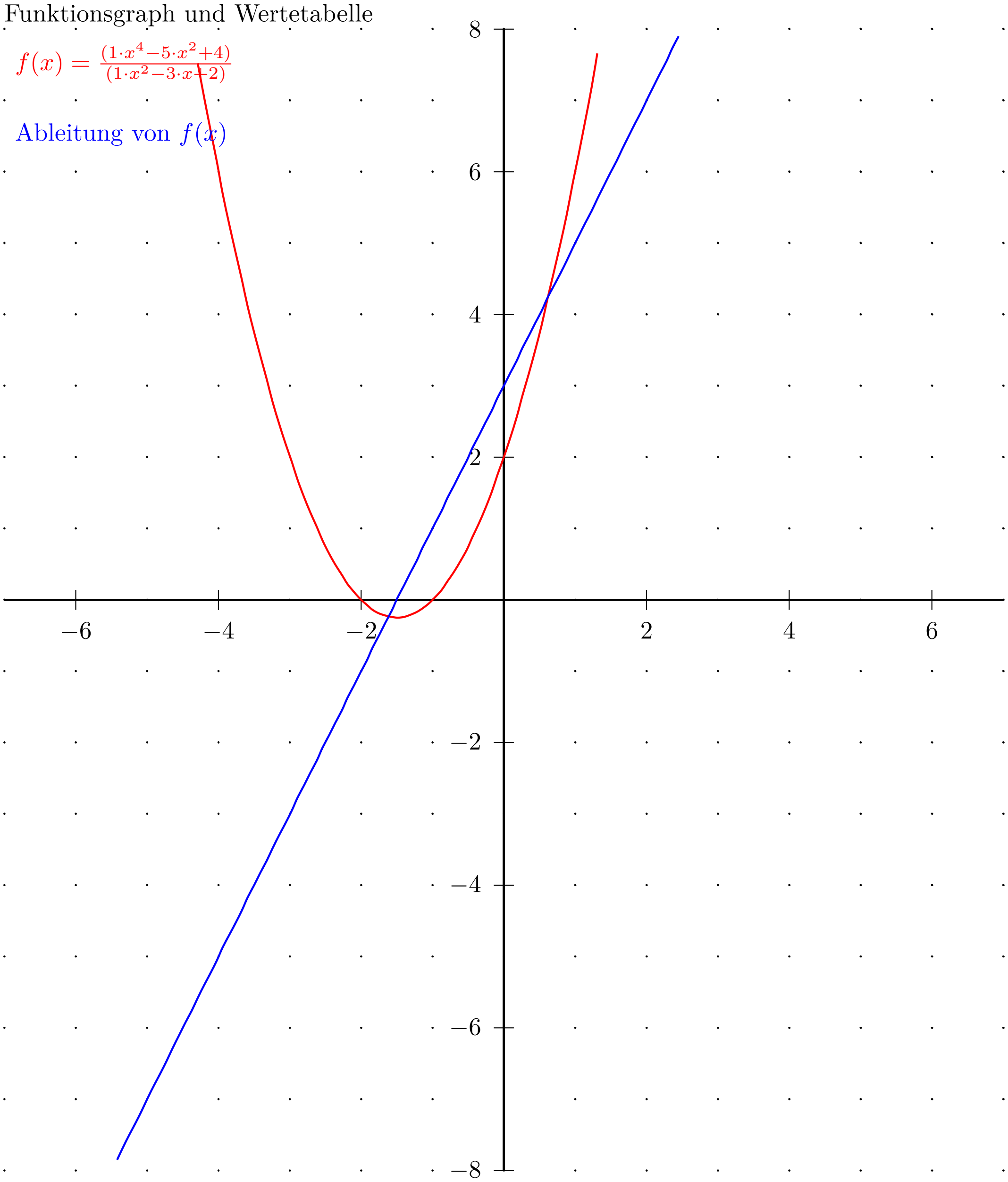
• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse

$$A = \int_{-2}^{-1} \left(x^2 + 3x + 2\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 1\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + 1\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1)\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 + 1\frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2)\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{6}\right) - \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{6}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	30	-11	2
$-6\frac{1}{2}$	$24\frac{3}{4}$	-10	2
-6	20	-9	2
$-5\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{4}$	-8	2
-5	12	-7	2
$-4\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	-6	2
-4	6	-5	2
$-3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	-4	2
-3	2	-3	2
$-2\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	-2	2
-2	0	-1	2
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	2
-1	0	1	2
$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	2	2
0	2	3	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	2	3	2
$\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4	2
1	NaN	5	NaN
$1\frac{1}{2}$	$8\frac{3}{4}$	6	2
2	NaN	7	NaN
$2\frac{1}{2}$	$15\frac{3}{4}$	8	2
3	20	9	2
$3\frac{1}{2}$	$24\frac{3}{4}$	10	2
4	30	11	2
$4\frac{1}{2}$	$35\frac{3}{4}$	12	2
5	42	13	2
$5\frac{1}{2}$	$48\frac{3}{4}$	14	2
6	56	15	2
$6\frac{1}{2}$	$63\frac{3}{4}$	16	2
7	72	17	2

Aufgabe (16)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{-x + 2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$1x^2 - 6x + 9 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{+6 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{6 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{6 + 0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{6 - 0}{2}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 3$

$\underline{x_1 = 3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$-x + 2 = 0$

$-1x + 2 = 0 \qquad / -2$

$-1x = -2 \qquad / : (-1)$

$x = \dfrac{-2}{-1}$

$x = 2$

$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x - 3)^2}{-(x - 2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$f(x) = \dfrac{-x^2 + 6x - 9}{x - 2}$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{llll} (-x^2 & +6x & -9 &) : (x-2) = -x + 4 \\ -(-x^2 & +2x) & & \\ \hline & 4x & -9 & \\ & -(4x & -8) & \\ \hline & & -1 & \end{array}$$

$f(x) = -x + 4 + \dfrac{-1}{x - 2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(-2x + 6) \cdot (x - 2) - (-x^2 + 6x - 9) \cdot 1}{(x - 2)^2}$

$= \dfrac{(-2x^2 + 10x - 12) - (-x^2 + 6x - 9)}{(x - 2)^2}$

$= \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{(x - 2)^2}$

$= \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{(x - 2)^2}$

$f''(x) = \dfrac{(-2x + 4) \cdot (x^2 - 4x + 4) - (-x^2 + 4x - 3) \cdot (2x - 4)}{(x^2 - 4x + 4)^2}$

$= \frac{(-2x^3 + 12x^2 - 24x + 16) - (-2x^3 + 12x^2 - 22x + 12)}{(x^2 - 4x + 4)^2}$
$= \frac{-2x + 4}{(x^2 - 4x + 4)^2}$
$= \frac{-2x + 4}{(x^2 - 4x + 4)^2}$
$= \frac{-2(x - 2)}{(x - 2)^4}$
$= \frac{-2}{(x - 2)^3}$
$= \frac{-2}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$-x^2 + 6x - 9 = 0$
$\underline{x_3 = 3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 2[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]2; 3[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2})}{x(-1 + \frac{2}{x})} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2})}{x(-1 + \frac{2}{x})} = \infty$
Schiefe Asymptote:$y = -x + 4$
$\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{-(x - 3)^2}{(x - 2)} = -\infty$
$\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{-(x - 3)^2}{(x - 2)} = \infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = 2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x + 4} = 0$

$-x^2 + 4x - 3 = 0$
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}}{2 \cdot (-1)}$
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2}$
$x_{1/2} = \frac{-4 \pm 2}{-2}$
$x_1 = \frac{-4 + 2}{-2} \qquad x_2 = \frac{-4 - 2}{-2}$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 3$
$\underline{x_4 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_5 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(1/4)}$
$f''(3) = -2$
$f''(3) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(3/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x + 4}$
Zaehler $= 0$
$\underline{x_6 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_7 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_8 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	1	$< x <$	2	$< x <$	3	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]1;2[\quad \cup \quad]2;3[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;1[\quad \cup \quad]3;\infty[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{-2}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

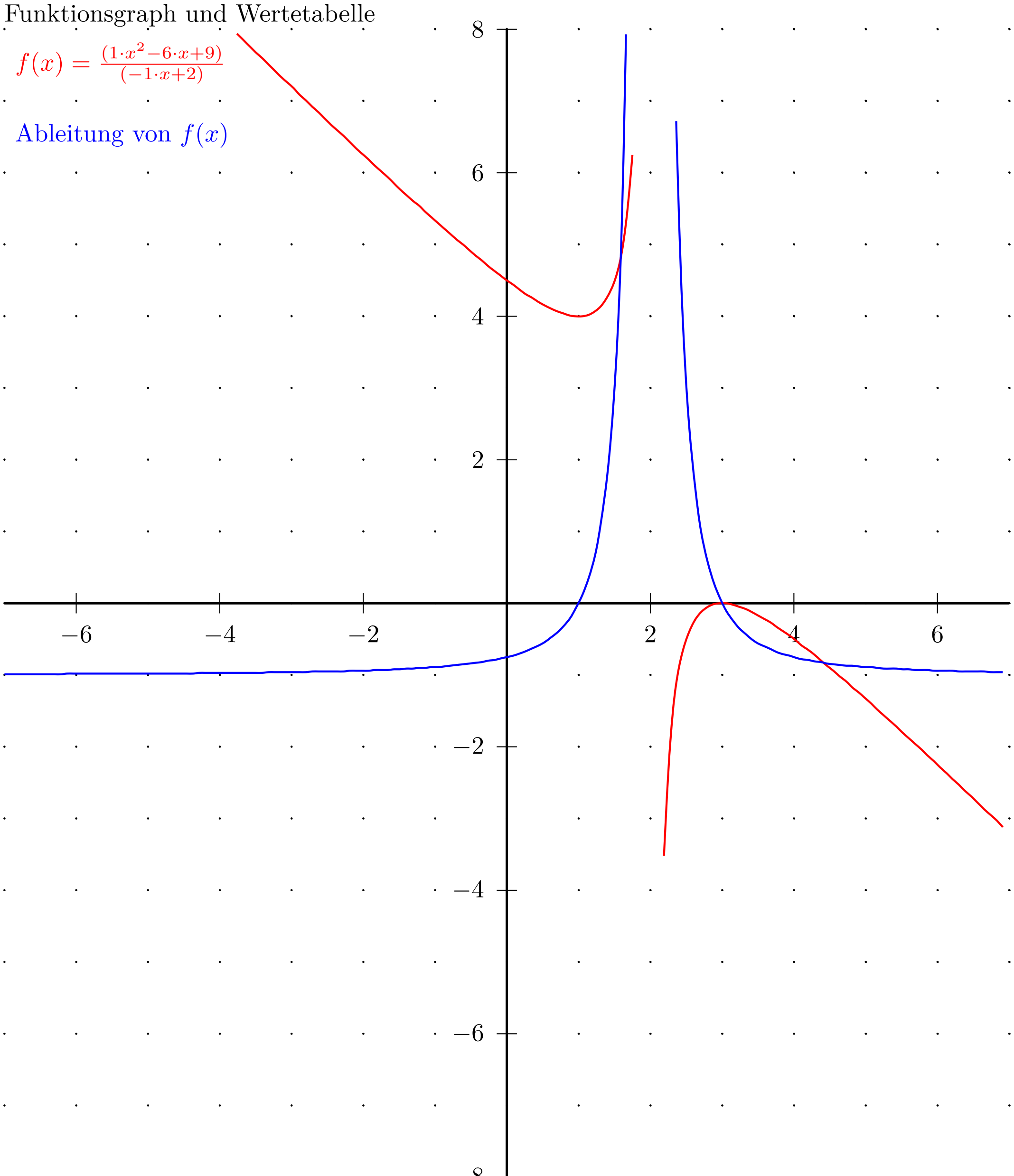
Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_9 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	2	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$\underline{\quad x \in]-\infty;2[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{\quad x \in]2;\infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$11\frac{1}{9}$	$-\frac{80}{81}$	$0,00274$
$-6\frac{1}{2}$	$10\frac{21}{34}$	$-0,986$	$0,00326$
-6	$10\frac{1}{8}$	$-\frac{63}{64}$	$0,00391$
$-5\frac{1}{2}$	$9\frac{19}{30}$	$-0,982$	$0,00474$
-5	$9\frac{1}{7}$	$-\frac{48}{49}$	$0,00583$
$-4\frac{1}{2}$	$8\frac{17}{26}$	$-0,976$	$0,00728$
-4	$8\frac{1}{6}$	$-\frac{35}{36}$	$0,00926$
$-3\frac{1}{2}$	$7\frac{15}{22}$	$-0,967$	$0,012$
-3	$7\frac{1}{5}$	$-\frac{24}{25}$	$0,016$
$-2\frac{1}{2}$	$6\frac{13}{18}$	$-\frac{77}{81}$	$0,0219$
-2	$6\frac{1}{4}$	$-0,937$	$\frac{1}{32}$
$-1\frac{1}{2}$	$5\frac{11}{14}$	$-0,918$	$0,0466$
-1	$5\frac{1}{3}$	$-0,889$	$0,0741$
$-\frac{1}{2}$	$4\frac{9}{10}$	$-0,84$	$0,128$
0	$4\frac{1}{2}$	$-0,75$	$0,25$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$4\frac{1}{2}$	$-0,75$	$0,25$
$\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{6}$	$-0,555$	$0,593$
1	4	$0,000306$	2
$1\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	3	16
2	$+unendlich$	$-3266\frac{15}{49}$	$-unendlich$
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	3	-16
3	0	$0,000306$	-2
$3\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{6}$	$-0,555$	$-0,593$
4	$-\frac{1}{2}$	$-0,75$	$-0,25$
$4\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{10}$	$-0,84$	$-0,128$
5	$-1\frac{1}{3}$	$-0,889$	$-0,0741$
$5\frac{1}{2}$	$-1\frac{11}{14}$	$-0,918$	$-0,0466$
6	$-2\frac{1}{4}$	$-0,937$	$-\frac{1}{32}$
$6\frac{1}{2}$	$-2\frac{13}{18}$	$-\frac{77}{81}$	$-0,0219$
7	$-3\frac{1}{5}$	$-\frac{24}{25}$	$-0,016$

Aufgabe (17)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{3x + 6}$
Zaehler faktorisieren:
$x^2 + 3x + 3 = 0$

$1x^2 + 3x + 3 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2}$
Diskriminante negativ keine Lösung

Nenner faktorisieren:
$3x + 6 = 0$

$3x + 6 = 0 \qquad / - 6$
$3x = -6 \qquad / : 3$
$x = \dfrac{-6}{3}$
$x = -2$
$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \dfrac{(x^2 + 3x + 3)}{3(x + 2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
$f(x) = \dfrac{\frac{1}{3}x^2 + x + 1}{x + 2}$
Polynomdivision :

$$\begin{array}{llll}
(\frac{1}{3}x^2 & +x & +1 &) : (x+2) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \\
-(\frac{1}{3}x^2 & +\frac{2}{3}x) & & \\
\hline
& \frac{1}{3}x & +1 & \\
& -(\frac{1}{3}x & +\frac{2}{3}) & \\
\hline
& & \frac{1}{3} &
\end{array}$$

$f(x) = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3} + \dfrac{\frac{1}{3}}{x + 2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung
$f'(x) = \dfrac{(\frac{2}{3}x + 1) \cdot (x + 2) - (\frac{1}{3}x^2 + x + 1) \cdot 1}{(x + 2)^2}$
$= \dfrac{(\frac{2}{3}x^2 + 2\frac{1}{3}x + 2) - (\frac{1}{3}x^2 + x + 1)}{(x + 2)^2}$
$= \dfrac{\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{3}x + 1}{(x + 2)^2}$
$= \dfrac{\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{3}x + 1}{(x + 2)^2}$
$f''(x) = \dfrac{(\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}) \cdot (x^2 + 4x + 4) - (\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{3}x + 1) \cdot (2x + 4)}{(x^2 + 4x + 4)^2}$
$= \dfrac{(\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 8x + 5\frac{1}{3}) - (\frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 7\frac{1}{3}x + 4)}{(x^2 + 4x + 4)^2}$
$= \dfrac{0x^2 + \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}}{(x^2 + 4x + 4)^2}$

$= \frac{0x^2 + \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}}{(x^2+4x+4)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$\frac{1}{3}x^2 + x + 1 = 0$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]-2;\infty[\quad f(x) > 0 \quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-2[\quad f(x) < 0 \quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2})}{x(3+\frac{6}{x})} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2})}{x(3+\frac{6}{x})} = \infty$$

Schiefe Asymptote:$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{\frac{1}{3}(x^2+3x+3)}{(x+2)} = \infty$$

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{\frac{1}{3}(x^2+3x+3)}{(x+2)} = -\infty$$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -2$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{3}x + 1}{x^2+4x+4} = 0$$

$\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{3}x + 1 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-1\frac{1}{3} \pm \sqrt{1\frac{1}{3}^2 - 4\cdot\frac{1}{3}\cdot 1}}{2\cdot\frac{1}{3}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}}{\frac{2}{3}}$$

$$x_{1/2} = \frac{-1\frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}$$

$$x_1 = \frac{-1\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} \qquad x_2 = \frac{-1\frac{1}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}$$

$x_1 = -1 \qquad x_2 = -3$

$x_2 = -3; \quad$ 1-fache Nullstelle

$x_3 = -1; \quad$ 1-fache Nullstelle

$f''(-3) = -\frac{2}{3}$

$f''(-3) < 0 \Rightarrow$ Hochpunkt:$(-3/-1)$

$f''(-1) = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow$ $\underline{\text{Tiefpunkt:}(-1/\frac{1}{3})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{3}x^2 + 1\frac{1}{3}x + 1}{x^2 + 4x + 4}$

Zaehler = 0

$\underline{x_4 = -3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = -1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_6 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-3	$< x <$	-2	$< x <$	-1	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -3[\quad \cup \quad]-1; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-3; -2[\quad \cup \quad]-2; -1[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{0x^2 + \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}}{x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16}$

$Zaehler = 0$

$$0x^2 + \frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3} = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{2}{3}^2 - 4 \cdot 0 \cdot 1\frac{1}{3}}}{2 \cdot 0}$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}}{0}$$

$$x_{1/2} = \frac{-\frac{2}{3} \pm \frac{2}{3}}{0}$$

$$x_1 = \frac{-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{0} \qquad x_2 = \frac{-\frac{2}{3} - \frac{2}{3}}{0}$$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -\infty$

$\underline{x_7 = -\infty; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_8 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

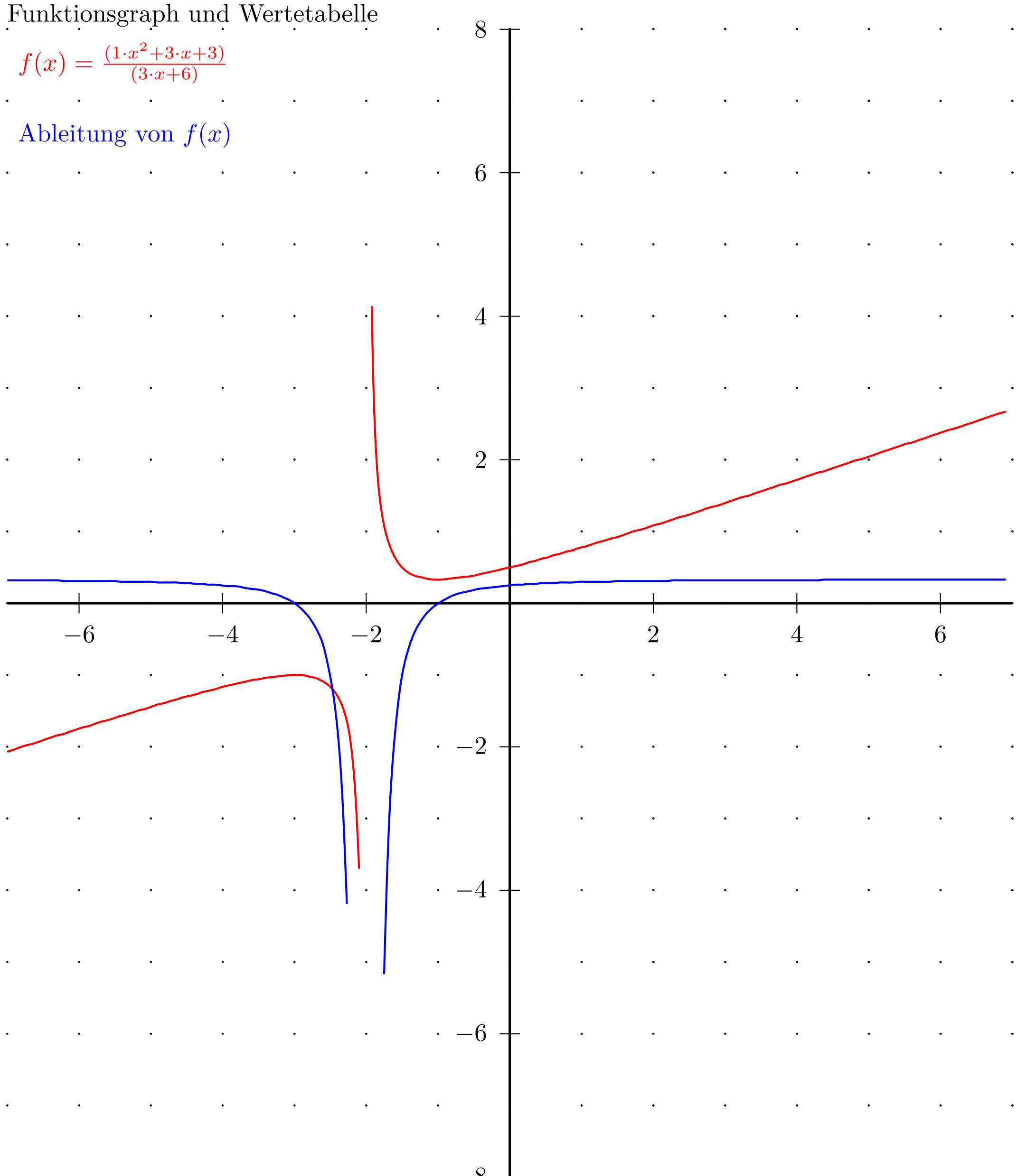
$\underline{x_9 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-\infty$	$< x <$	-2	$< x <$	-2	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-2; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-\infty; -\infty[\quad \cup \quad]-\infty; -2[\quad \cup \quad]-2; -2[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-2\frac{1}{15}$	$\frac{8}{25}$	$-0,00533$
$-6\frac{1}{2}$	$-1\frac{49}{54}$	$0,317$	$-0,00732$
-6	$-1\frac{3}{4}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{1}{96}$
$-5\frac{1}{2}$	$-1\frac{25}{42}$	$\frac{15}{49}$	$-0,0155$
-5	$-1\frac{4}{9}$	$0,296$	$-\frac{2}{81}$
$-4\frac{1}{2}$	$-1\frac{3}{10}$	$0,28$	$-0,0427$
-4	$-1\frac{1}{6}$	$0,25$	$-0,0833$
$-3\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{18}$	$0,185$	$-0,198$
-3	-1	$-0,000102$	$-0,667$
$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{6}$	-1	$-5,34$
-2	$+unendlich$	$1,09 \cdot 10^3$	$-unendlich$
$-1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$5,34$
-1	$\frac{1}{2}$	$-0,000102$	$0,667$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{18}$	$0,185$	$0,198$
0	$\frac{1}{2}$	$0,25$	$0,0833$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{1}{2}$	$0,25$	$0,0833$
$\frac{1}{2}$	$\frac{19}{30}$	$0,28$	$0,0427$
1	$\frac{7}{9}$	$0,296$	$\frac{2}{81}$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{15}{49}$	$0,0155$
2	$1\frac{1}{12}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{96}$
$2\frac{1}{2}$	$1\frac{13}{54}$	$0,317$	$0,00732$
3	$1\frac{2}{5}$	$\frac{8}{25}$	$0,00533$
$3\frac{1}{2}$	$1\frac{37}{66}$	$0,322$	$0,00401$
4	$1\frac{13}{18}$	$0,324$	$0,00309$
$4\frac{1}{2}$	$1\frac{23}{26}$	$0,325$	$0,00243$
5	$2\frac{1}{21}$	$\frac{16}{49}$	$0,00194$
$5\frac{1}{2}$	$2\frac{19}{90}$	$0,327$	$0,00158$
6	$2\frac{3}{8}$	$\frac{21}{64}$	$0,0013$
$6\frac{1}{2}$	$2,54$	$0,329$	$0,00109$
7	$2\frac{19}{27}$	$0,329$	$0,000914$

Aufgabe (18)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2}$

Zaehler faktorisieren:

$x^3+3x^2-4=0$

$x^3+3x^2-4=0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & +3x^2 & & -4 \quad) : (x-1) = x^2+4x+4 \\
-(x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & 4x^2 & & -4 \\
 & -(4x^2 & -4x) & \\
\hline
 & & 4x & -4 \\
 & & -(4x & -4) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$1x^2+4x+4=0$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-4 \pm 0}{2}$

$x_1 = \dfrac{-4+0}{2} \qquad x_2 = \dfrac{-4-0}{2}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x^2 = 0$

$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\underline{x_3 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+2)^2(x-1)}{x^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(x) = \dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2}$

$Polynomdivision:$

$$\begin{array}{lll}
(x^3 & +3x^2 & -4 \quad) : (x^2) = x+3 \\
-(x^3) & & \\
\hline
 & 3x^2 & -4 \\
 & -(3x^2) & \\
\hline
 & & -4
\end{array}$$

$f(x) = x+3+\dfrac{-4}{x^2}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(3x^2+6x)\cdot x^2-(x^3+3x^2-4)\cdot 2x}{(x^2)^2}$

$= \dfrac{(3x^4+6x^3)-(2x^4+6x^3-8x)}{(x^2)^2}$

$= \dfrac{x^4+8x}{(x^2)^2}$

$= \dfrac{x^4+8x}{(x^2)^2}$
$= \dfrac{(x^2-2x+4)(x+2)x}{x^4}$
$= \dfrac{(x^2-2x+4)(x+2)}{x^3}$
$= \dfrac{x^3+8}{x^3}$
$f''(x) = \dfrac{3x^2 \cdot x^3 - (x^3+8)\cdot 3x^2}{(x^3)^2}$
$= \dfrac{3x^5-(3x^5+24x^2)}{(x^3)^2}$
$= \dfrac{-24x^2}{(x^3)^2}$
$= \dfrac{-24x^2}{(x^3)^2}$
$= \dfrac{-24x^2}{x^6}$
$= \dfrac{-24}{x^4}$
$= \dfrac{-24}{x^4}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$Zaehler = 0$
$x^3+3x^2-4=0$
$x_4 = -2;\quad$ 2-fache Nullstelle
$x_5 = 1;\quad$ 1-fache Nullstelle

• Vorzeichentabelle:

	$x<$	-2	$<x<$	0	$<x<$	1	$<x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

$x \in]1;\infty[\quad f(x)>0\quad$ oberhalb der x-Achse

$x \in]-\infty;-2[\quad\cup\quad]-2;0[\quad\cup\quad]0;1[\quad f(x)<0\quad$ unterhalb der x-Achse

• Grenzwerte und Asymtoten:

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3})}{x^2(1)} = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3(1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3})}{x^2(1)} = \infty$
Schiefe Asymptote:$y = x+3$
$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{(x+2)^2(x-1)}{x^2} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{(x+2)^2(x-1)}{x^2} = -\infty$
Vertikale Asymptote (Polstelle): $x=0$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = \dfrac{x^3+8}{x^3} = 0$

$x^3 + 8 = 01x^3 + 8 = 0 \qquad / - 8$
$1x^3 = -8 \qquad / : 1$
$x^3 = \frac{-8}{1}$
$x = \sqrt[3]{-8}$
$x = -2$
Polynomdivision:(-2)

$$\begin{array}{llllll}
(x^3 & & & +8 &) : (x+2) = x^2 - 2x + 4 \\
-(x^3 & +2x^2) & & & \\
\hline
& -2x^2 & & +8 & \\
& -(-2x^2 & -4x) & & \\
\hline
& & 4x & +8 & \\
& & -(4x & +8) & \\
\hline
& & & 0 &
\end{array}$$

$1x^2 - 2x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \frac{+2 \pm \sqrt{-12}}{2}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_6 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(-2) = -1\frac{1}{2}$
$f''(-2) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-2/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)
$f'(x) = \frac{x^3 + 8}{x^3}$
Zaehler $= 0$
$\underline{x_7 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_8 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-2	$< x <$	0	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -2[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-2; 0[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

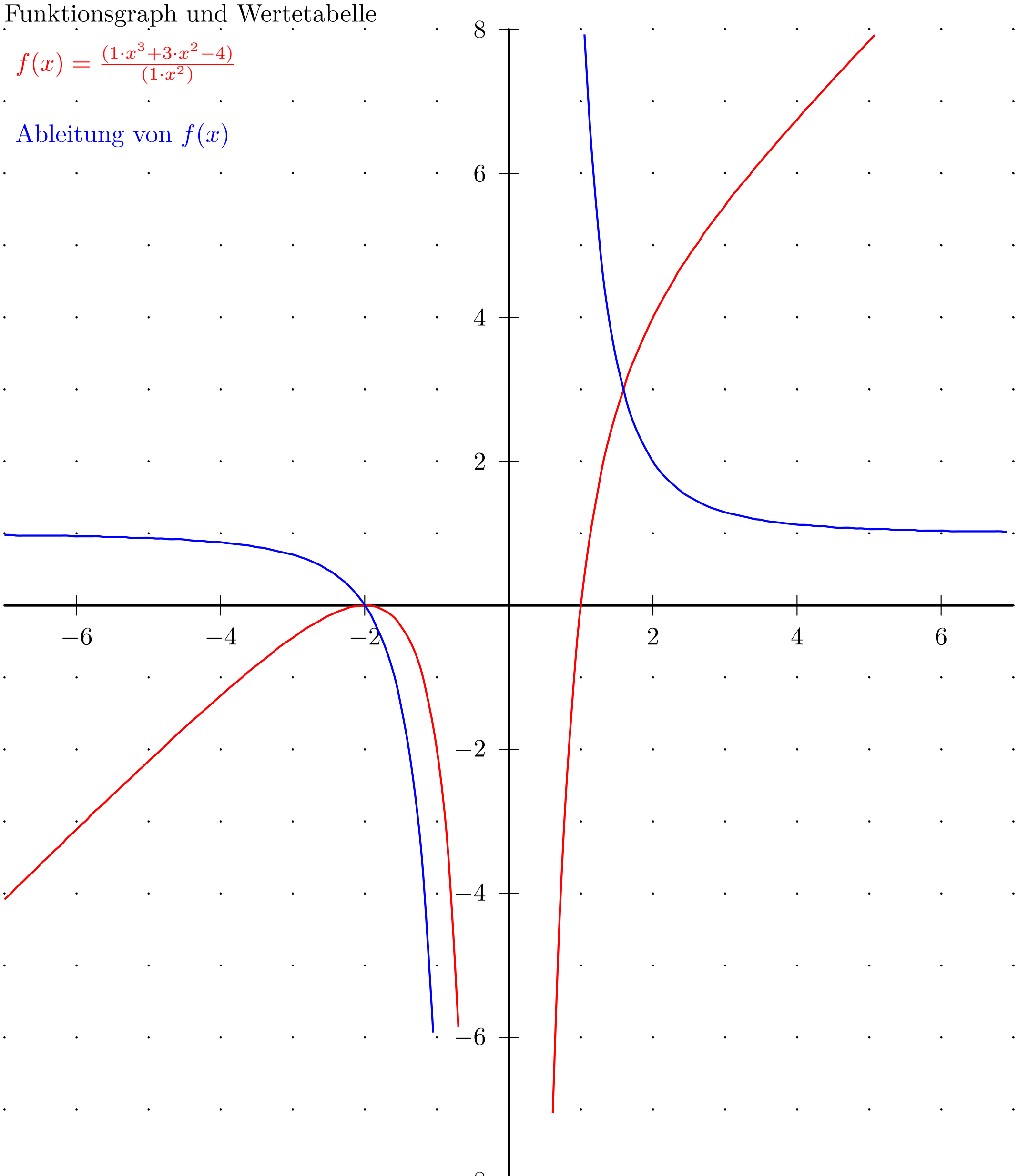
• Kruemmung
$f''(x) = \frac{-24}{x^4}$
$Zaehler = 0$
keine Loesung

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen
$\underline{x_9 = 0; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	0	$< x$
$f''(x)$	$-$	0	$-$

$\underline{x \in]-\infty; 0[\quad \cup \quad]0; \infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-4\frac{4}{49}$	$0,977$	$-0,01$
$-6\frac{1}{2}$	$-3,59$	$0,971$	$-0,0134$
-6	$-3\frac{1}{9}$	$\frac{26}{27}$	$-\frac{1}{54}$
$-5\frac{1}{2}$	$-2,63$	$0,952$	$-0,0262$
-5	$-2\frac{4}{25}$	$0,936$	$-0,0384$
$-4\frac{1}{2}$	$-1,7$	$0,912$	$-0,0585$
-4	$-1\frac{1}{4}$	$0,875$	$-0,0938$
$-3\frac{1}{2}$	$-\frac{81}{98}$	$0,813$	$-0,16$
-3	$-\frac{4}{9}$	$0,704$	$-0,296$
$-2\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{50}$	$0,488$	$-0,614$
-2	0	$-0,000153$	$-1,5$
$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{18}$	$-1,37$	$-4,74$
-1	-2	-7	-24
$-\frac{1}{2}$	$-13\frac{1}{2}$	$-63,2$	-385
0	$-unendlich$	1	$+unendlich$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$-unendlich$	1	$+unendlich$
$\frac{1}{2}$	$-12\frac{1}{2}$	$65,2$	-385
1	0	9	-24
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{13}{18}$	$3,37$	$-4,74$
2	4	2	$-1,5$
$2\frac{1}{2}$	$4\frac{43}{50}$	$1,51$	$-0,614$
3	$5\frac{5}{9}$	$1,3$	$-0,296$
$3\frac{1}{2}$	$6\frac{17}{98}$	$1,19$	$-0,16$
4	$6\frac{3}{4}$	$1,13$	$-0,0938$
$4\frac{1}{2}$	$7,3$	$1,09$	$-0,0585$
5	$7\frac{21}{25}$	$1,06$	$-0,0384$
$5\frac{1}{2}$	$8,37$	$1,05$	$-0,0262$
6	$8\frac{8}{9}$	$1\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{54}$
$6\frac{1}{2}$	$9,41$	$1,03$	$-0,0134$
7	$9\frac{45}{49}$	$1,02$	$-0,01$

Aufgabe (19)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{-x^3+3x^2-4}{-\frac{1}{2}x^2-3x-4\frac{1}{2}}$

Zaehler faktorisieren:

$-x^3+3x^2-4=0$

$-x^3+3x^2-4=0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -1

$$\begin{array}{llll}
(-x^3 & +3x^2 & & -4 \quad) : (x+1) = -x^2+4x-4 \\
-(-x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & 4x^2 & & -4 \\
 & -(4x^2 & +4x) & \\
\hline
 & & -4x & -4 \\
 & & -(-4x & -4) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}$$

$-x^2+4x-4=0$

$x_{1/2} = \dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-1)\cdot(-4)}}{2\cdot(-1)}$

$x_{1/2} = \dfrac{-4\pm\sqrt{0}}{-2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-4\pm 0}{-2}$

$x_1 = \dfrac{-4+0}{-2} \qquad x_2 = \dfrac{-4-0}{-2}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 2$

$\underline{x_1 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 2;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$-\dfrac{1}{2}x^2-3x-4\dfrac{1}{2}=0$

$-\dfrac{1}{2}x^2-3x-4\dfrac{1}{2}=0$

$x_{1/2} = \dfrac{+3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-4\frac{1}{2}\right)}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$x_{1/2} = \dfrac{+3\pm\sqrt{0}}{-1}$

$x_{1/2} = \dfrac{3\pm 0}{-1}$

$x_1 = \dfrac{3+0}{-1} \qquad x_2 = \dfrac{3-0}{-1}$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = -3$

$\underline{x_3 = -3;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{-(x+1)(x-2)^2}{-\frac{1}{2}(x+3)^2}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$f(x) = \dfrac{2x^3-6x^2+8}{x^2+6x+9}$

Polynomdivision :

$$\begin{array}{lllll}
(2x^3 & -6x^2 & & +8 &) : (x^2+6x+9) = 2x-18 \\
-(2x^3 & +12x^2 & +18x) & & \\
\hline
 & -18x^2 & -18x & +8 & \\
 & -(-18x^2 & -108x & -162) & \\
\hline
 & & 90x & +170 &
\end{array}$$

$f(x) = 2x - 18 + \dfrac{90x+170}{x^2+6x+9}$

• 1. Ableitungen und 2.Ableitung

$f'(x) = \dfrac{(6x^2-12x)\cdot(x^2+6x+9)-(2x^3-6x^2+8)\cdot(2x+6)}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \dfrac{(6x^4+24x^3-18x^2-108x)-(4x^4-36x^2+16x+48)}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \dfrac{2x^4+24x^3+18x^2-124x-48}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \dfrac{2x^4+24x^3+18x^2-124x-48}{(x^2+6x+9)^2}$

$= \dfrac{2(x+10,6)(x+3)(x+0,377)(x-2)}{(x+3)^4}$

$= \dfrac{2(x+10,6)(x+0,377)(x-2)}{(x+3)^3}$

$= \dfrac{2x^3+18x^2-36x-16}{x^3+9x^2+27x+27}$

$f''(x) = \dfrac{(6x^2+36x-36)\cdot(x^3+9x^2+27x+27)-(2x^3+18x^2-36x-16)\cdot(3x^2+18x+27)}{(x^3+9x^2+27x+27)^2}$

$= \dfrac{(6x^5+90x^4+450x^3+810x^2-972)-(6x^5+90x^4+270x^3-210x^2-1,26\cdot10^3x-432)}{(x^3+9x^2+27x+27)^2}$

$= \dfrac{180x^3+1,02\cdot10^3x^2+1,26\cdot10^3x-540}{(x^3+9x^2+27x+27)^2}$

$= \dfrac{180x^3+1,02\cdot10^3x^2+1,26\cdot10^3x-540}{(x^3+9x^2+27x+27)^2}$

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:

$Zaehler = 0$

$2x^3 - 6x^2 + 8 = 0$

$\underline{x_4 = -1;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_5 = 2;\quad \text{2-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	-3	$< x <$	-1	$< x <$	2	$< x$
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

$\underline{\quad x \in]-1;2[\quad \cup \quad]2;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{\quad x \in]-\infty;-3[\quad \cup \quad]-3;-1[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Grenzwerte und Asymtoten:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3(-1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3})}{x^2(-\frac{1}{2}-\frac{3}{x}-\frac{4\frac{1}{2}}{x^2})} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3(-1+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3})}{x^2(-\frac{1}{2}-\frac{3}{x}-\frac{4\frac{1}{2}}{x^2})} = \infty$$

Schiefe Asymptote:$y = 2x - 18$

$\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{2(x+1)(x-2)^2}{(x+3)^2} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{2(x+1)(x-2)^2}{(x+3)^2} = -\infty$

Vertikale Asymptote (Polstelle): $x = -3$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:

$f'(x) = \dfrac{2x^3 + 18x^2 - 36x - 16}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27} = 0$

$2x^3 + 18x^2 - 36x - 16 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:2

$$\begin{array}{llll}
(2x^3 & +18x^2 & -36x & -16 \quad) : (x-2) = 2x^2 + 22x + 8 \\
-(2x^3 & -4x^2) & & \\
\hline
 & 22x^2 & -36x & -16 \\
 & -(22x^2 & -44x) & \\
\hline
 & & 8x & -16 \\
 & & -(8x & -16) \\
\hline
 & & & -0
\end{array}$$

$2x^2 + 22x + 8 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-22 \pm \sqrt{22^2 - 4 \cdot 2 \cdot 8}}{2 \cdot 2}$

$x_{1/2} = \dfrac{-22 \pm \sqrt{420}}{4}$

$x_{1/2} = \dfrac{-22 \pm 20,5}{4}$

$x_1 = \dfrac{-22 + 20,5}{4} \qquad x_2 = \dfrac{-22 - 20,5}{4}$

$x_1 = -0,377 \qquad x_2 = -10,6$

$\underline{x_6 = -10,6; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_7 = -0,377; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_8 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$f''(-10,6) = 0,515 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(-10,6/-52,8)}$

$f''(-0,377) = -2,67$

$f''(-0,377) < 0 \Rightarrow \underline{\text{Hochpunkt:}(-0,377/1,02)}$

$f''(2) = 0,388 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2/0)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

$f'(x) = \dfrac{2x^3 + 18x^2 - 36x - 16}{x^3 + 9x^2 + 27x + 27}$

Zaehler $= 0$

$\underline{x_9 = -10,6; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_10 = -0,377; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_11 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstellen des Nenners aus f(x) übernehmen

$\underline{x_12 = -3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	$-10,6$	$< x <$	-3	$< x <$	$-0,377$	$< x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -10,6[\quad \cup \quad]-3; -0,377[\quad \cup \quad]2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-10,6; -3[\quad \cup \quad]-0,377; 2[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Kruemmung

$f''(x) = \dfrac{180x^3 + 1,02 \cdot 10^3 x^2 + 1,26 \cdot 10^3 x - 540}{x^6 + 18x^5 + 135x^4 + 540x^3 + 1,22 \cdot 10^3 x^2 + 1,46 \cdot 10^3 x + 729}$

$Zaehler = 0$

$180x^3 + 1,02 \cdot 10^3 x^2 + 1,26 \cdot 10^3 x - 540 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten: -3

$$\begin{array}{llllll}
(180x^3 & +1,02 \cdot 10^3 x^2 & +1,26 \cdot 10^3 x & -540 &) : (x+3) = 180x^2 + 480x - 180 \\
-(180x^3 & +540x^2) & & & \\ \hline
 & 480x^2 & +1,26 \cdot 10^3 x & -540 & \\
 & -(480x^2 & +1,44 \cdot 10^3 x) & & \\ \hline
 & & -180x & -540 & \\
 & & -(-180x & -540) & \\ \hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$180x^2 + 480x - 180 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{-480 \pm \sqrt{480^2 - 4 \cdot 180 \cdot (-180)}}{2 \cdot 180}$

$x_{1/2} = \dfrac{-480 \pm \sqrt{3,6 \cdot 10^5}}{360}$

$x_{1/2} = \dfrac{-480 \pm 600}{360}$

$x_1 = \dfrac{-480 + 600}{360} \qquad x_2 = \dfrac{-480 - 600}{360}$

$x_1 = \dfrac{1}{3} \qquad x_2 = -3$

$\underline{x_1 3 = -3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_1 4 = \frac{1}{3}; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nullstelle des Nenners aus f(x) übernehmen

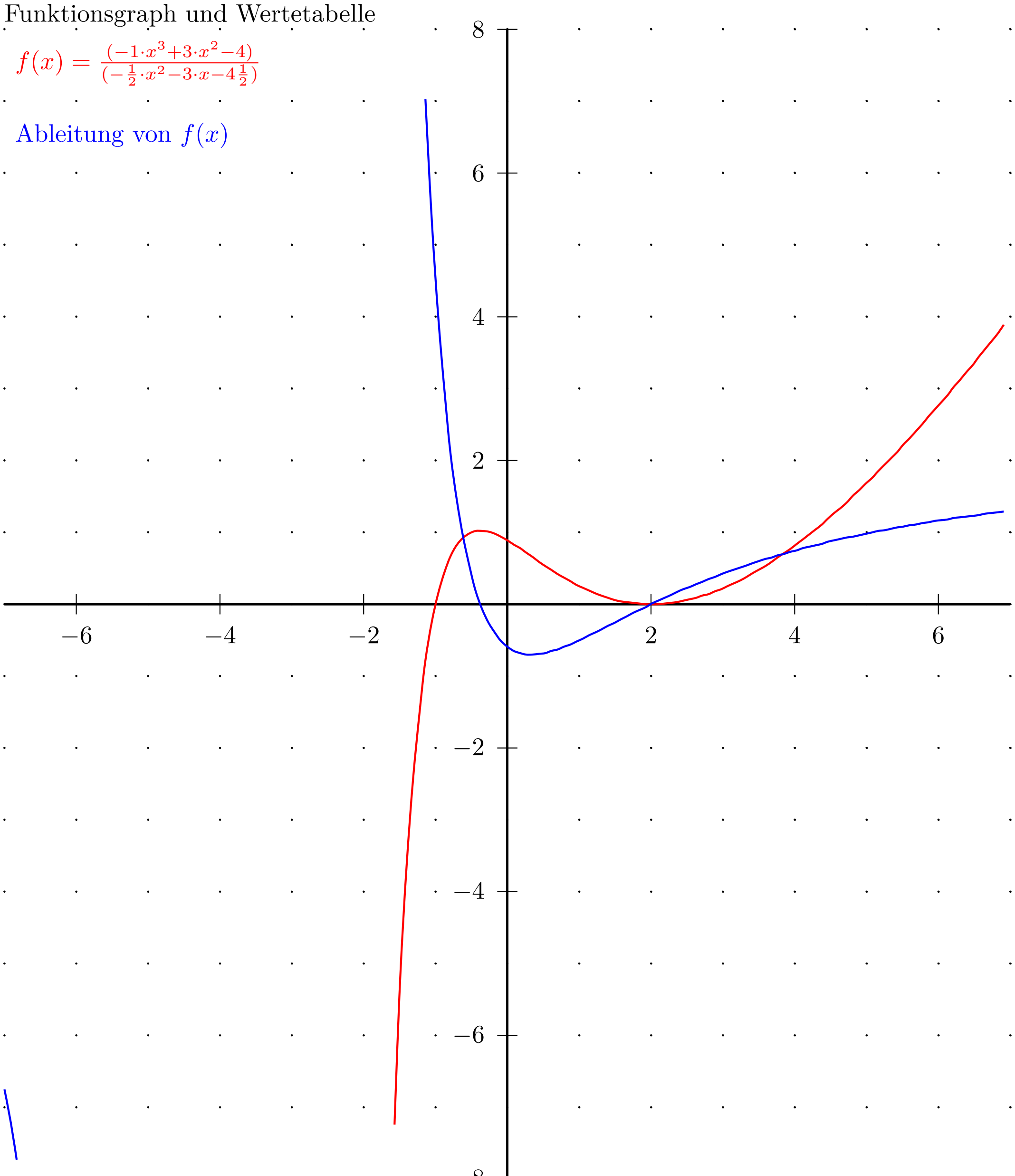
$\underline{x_1 5 = -3; \quad \text{2-fache Nullstelle}}$

	$x <$	-3	$< x <$	$\frac{1}{3}$	$< x$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; -3[\quad \cup \quad]\frac{1}{3}; \infty[\quad f''(x) > 0 \quad \text{linksgekrümmt}}$

$\underline{x \in]-3; \frac{1}{3}[\quad f''(x) < 0 \quad \text{rechtsgekrümmt}}$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	$-60\frac{3}{4}$	$-6,75$	$-5,16$
$-6\frac{1}{2}$	$-64\frac{43}{49}$	-10	$-8,2$
-6	$-71\frac{1}{9}$	$-15,4$	$-14,1$
$-5\frac{1}{2}$	-81	$-25,2$	$-26,9$
-5	-98	$-45,5$	-60
$-4\frac{1}{2}$	$-131\frac{4}{9}$	$-97,3$	-172
-4	-216	-288	-780
$-3\frac{1}{2}$	-605	$-1,96\cdot 10^3$	$-1,11\cdot 10^4$
-3	$+unendlich$	$293879\frac{27}{49}$	$-unendlich$
$-2\frac{1}{2}$	-243	$1,25\cdot 10^3$	$-8,18\cdot 10^3$
-2	-32	112	-420
$-1\frac{1}{2}$	$-5\frac{4}{9}$	$21,3$	$-65,2$
-1	0	$4,5$	-15
$-\frac{1}{2}$	1	$0,401$	$-3,84$
0	$\frac{8}{9}$	$-0,592$	$-0,741$

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	$\frac{8}{9}$	$-0,592$	$-0,741$
$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{49}$	$-0,682$	$0,2$
1	$\frac{1}{4}$	$-0,5$	$0,469$
$1\frac{1}{2}$	$\frac{5}{81}$	$-0,25$	$0,512$
2	0	$-4,9\cdot 10^{-6}$	$0,48$
$2\frac{1}{2}$	$0,0579$	$0,227$	$0,426$
3	$\frac{2}{9}$	$0,426$	$\frac{10}{27}$
$3\frac{1}{2}$	$0,479$	$0,598$	$0,319$
4	$\frac{40}{49}$	$0,746$	$0,275$
$4\frac{1}{2}$	$1\frac{2}{9}$	$0,874$	$0,237$
5	$1\frac{11}{16}$	$0,984$	$0,205$
$5\frac{1}{2}$	$2,2$	$1,08$	$0,178$
6	$2\frac{62}{81}$	$1,16$	$0,155$
$6\frac{1}{2}$	$3,37$	$1,24$	$0,136$
7	4	$1,3$	$\frac{3}{25}$

Aufgabe (20)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{3x^3 - 10x^2 + 7x - 12}{x-3}$
Zaehler faktorisieren:
$3x^3 - 10x^2 + 7x - 12 = 0$

$3x^3 - 10x^2 + 7x - 12 = 0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:3

$$\begin{array}{llll l}
(3x^3 & -10x^2 & +7x & -12 &) : (x-3) = 3x^2 - x + 4 \\
-(3x^3 & -9x^2) & & & \\
\hline
 & -x^2 & +7x & -12 & \\
 & -(-x^2 & +3x) & & \\
\hline
 & & 4x & -12 & \\
 & & -(4x & -12) & \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}$$

$3x^2 - x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{-47}}{6}$
Diskriminante negativ keine Lösung
$\underline{x_1 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x - 3 = 0$

$x - 3 = 0 \qquad / + 3$
$x = 3$
$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \dfrac{3(x^2 - \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3})(x-3)}{(x-3)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$
• Term gekürzen
$f(x) = \dfrac{3(x^2 - \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3})}{1}$
• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = 3x^2 - x + 4$
$f'(x) = 6x - 1$
$f''(x) = 6$
$F(x) = \int (3x^2 - x + 4)dx = x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 4x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =]3\dfrac{11}{12}, \infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(3 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^2})$
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = [3 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [3 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 3 \cdot (-x)^2 - 1 \cdot (-x) + 4$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = 3x^2 - x + 4 = 0$

$3x^2 - x + 4 = 0$
$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3}$
$x_{1/2} = \frac{+1 \pm \sqrt{-47}}{6}$
Diskriminante negativ keine Lösung

• Vorzeichentabelle:
kein Vorzeichenwechsel
$x \in \mathbb{R} \quad f(x) > 0$ oberhalb der x-Achse

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 6x - 1 = 0$

$6x - 1 = 0 \quad / + 1$
$6x = 1 \quad / : 6$
$x = \frac{1}{6}$
$x = \frac{1}{6}$
$x_1 = \frac{1}{6}$; 1-fache Nullstelle
$f''(\frac{1}{6}) = 6 > 0 \Rightarrow$ Tiefpunkt:$(\frac{1}{6}/3\frac{11}{12})$

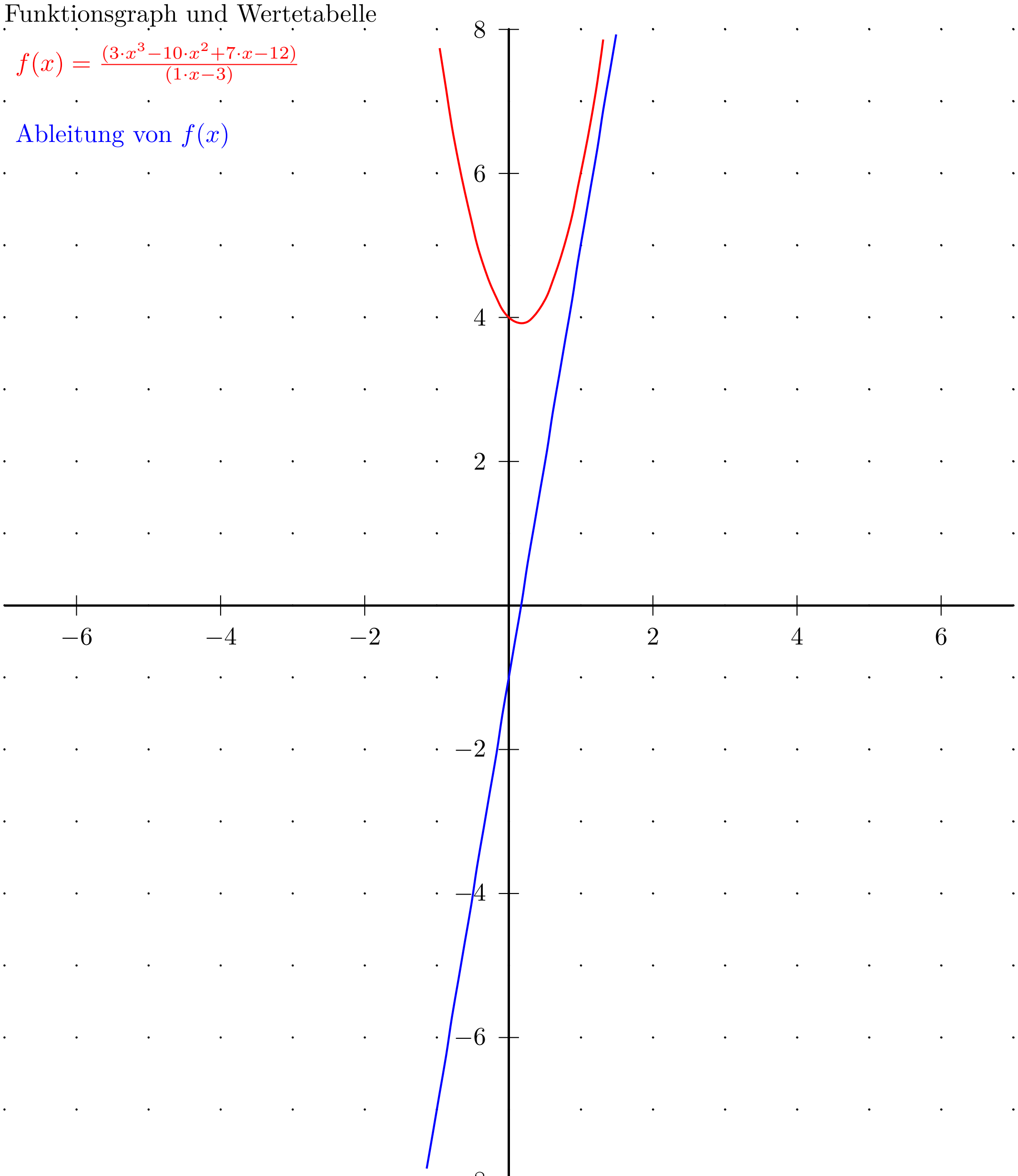
• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	$\frac{1}{6}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$x \in]\frac{1}{6}; \infty[\quad f'(x) > 0$ streng monoton steigend
$x \in]-\infty; \frac{1}{6}[\quad f'(x) < 0$ streng monoton fallend

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
keine Fläche

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	158	-43	6
$-6\frac{1}{2}$	$137\frac{1}{4}$	-40	6
-6	118	-37	6
$-5\frac{1}{2}$	$100\frac{1}{4}$	-34	6
-5	84	-31	6
$-4\frac{1}{2}$	$69\frac{1}{4}$	-28	6
-4	56	-25	6
$-3\frac{1}{2}$	$44\frac{1}{4}$	-22	6
-3	34	-19	6
$-2\frac{1}{2}$	$25\frac{1}{4}$	-16	6
-2	18	-13	6
$-1\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{4}$	-10	6
-1	8	-7	6
$-\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	-4	6
0	4	-1	6

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	4	-1	6
$\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	2	6
1	6	5	6
$1\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{4}$	8	6
2	14	11	6
$2\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{4}$	14	6
3	NaN	17	NaN
$3\frac{1}{2}$	$37\frac{1}{4}$	20	6
4	48	23	6
$4\frac{1}{2}$	$60\frac{1}{4}$	26	6
5	74	29	6
$5\frac{1}{2}$	$89\frac{1}{4}$	32	6
6	106	35	6
$6\frac{1}{2}$	$124\frac{1}{4}$	38	6
7	144	41	6

Aufgabe (21)

•Funktion/Faktorisieren
$f(x) = \dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x-2}$
Zaehler faktorisieren:
$x^3-6x^2+11x-6=0$

$x^3-6x^2+11x-6=0$
Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$\begin{array}{llll}
(x^3 & -6x^2 & +11x & -6 \quad):(x-1)=x^2-5x+6 \\
-(x^3 & -x^2) & & \\ \hline
 & -5x^2 & +11x & -6 \\
 & -(-5x^2 & +5x) & \\ \hline
 & & 6x & -6 \\
 & & -(6x & -6) \\ \hline
 & & & 0
\end{array}$$

$1x^2-5x+6=0$
$x_{1/2} = \dfrac{+5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot6}}{2\cdot1}$
$x_{1/2} = \dfrac{+5\pm\sqrt{1}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{5\pm1}{2}$
$x_1 = \dfrac{5+1}{2} \qquad x_2 = \dfrac{5-1}{2}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = 2$
$\underline{x_1 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_3 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:
$x-2=0$

$x-2=0 \qquad /+2$
$x=2$
$\underline{x_4 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:
$f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{2\}$
• Term gekürzen
$f(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{1}$
• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion
$f(x) = x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$
$f'(x) = 2x-4$
$f''(x) = 2$
$F(x) = \int (x^2-4x+3)dx = \frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =](-1),\infty[$

• Grenzwerte:
$f(x) = x^2(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1 \cdot \infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1 \cdot (-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1 \cdot (-x)^2 - 4 \cdot (-x) + 3$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$

$1x^2 - 4x + 3 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{+4 \pm \sqrt{4}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$
$x_1 = \dfrac{4+2}{2} \qquad x_2 = \dfrac{4-2}{2}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = 1$
$\underline{x_1 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x <$	1	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty; 1[\quad \cup \quad]3; \infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]1; 3[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x - 4 = 0$

$2x - 4 = 0 \qquad / + 4$
$2x = 4 \qquad / : 2$
$x = \dfrac{4}{2}$
$x = 2$
$\underline{x_3 = 2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(2/-1)}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x <$	2	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]2; \infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

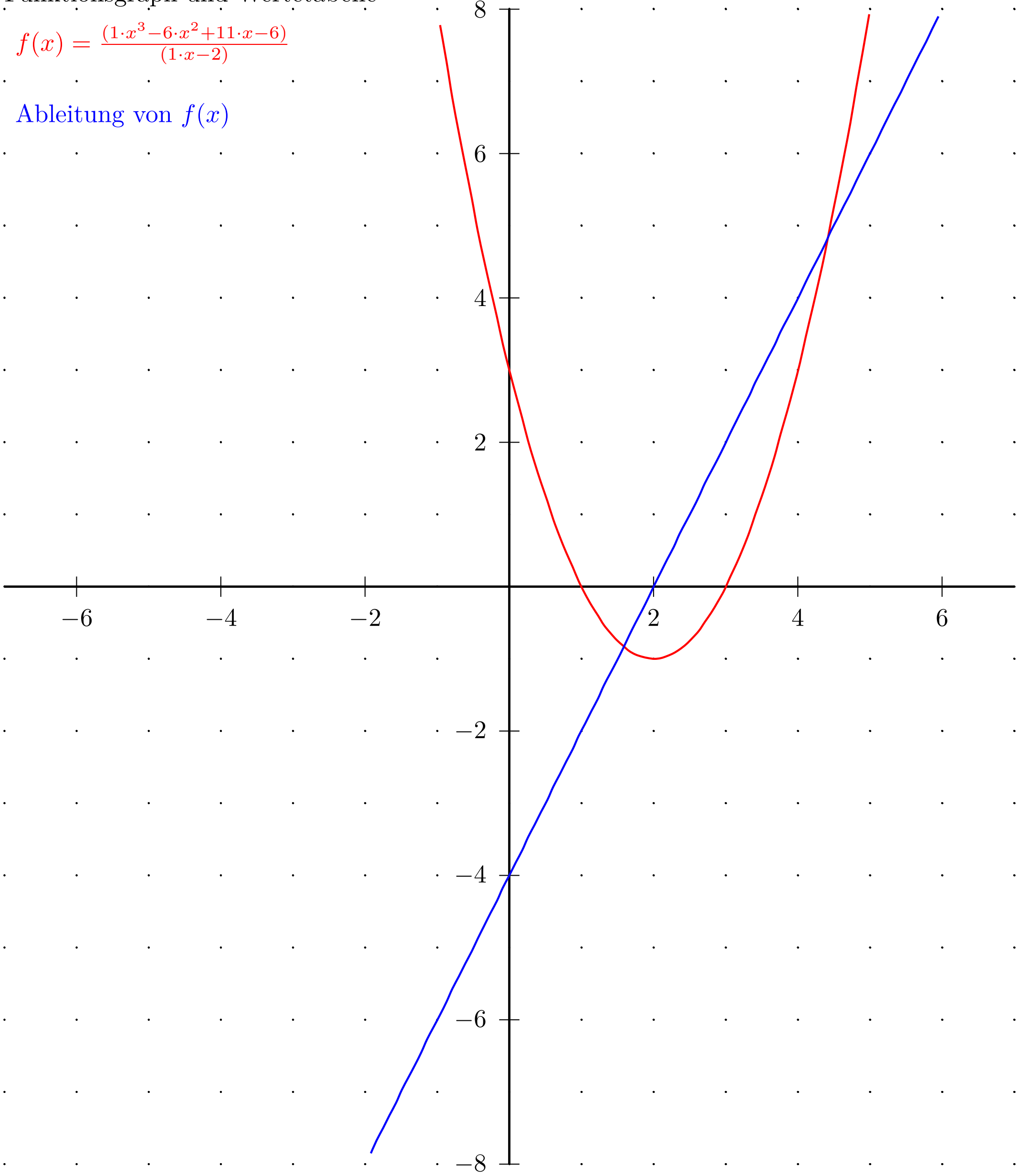
$\underline{x \in]-\infty; 2[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$A = \displaystyle\int_1^3 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_1^3$
$= \left(\dfrac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3\right) - \left(\dfrac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1\right)$
$= (0) - \left(1\dfrac{1}{3}\right) = -1\dfrac{1}{3}$

Funktionsgraph und Wertetabelle

$f(x) = \frac{(1 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x - 6)}{(1 \cdot x - 2)}$

Ableitung von $f(x)$



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	80	-18	2
$-6\frac{1}{2}$	$71\frac{1}{4}$	-17	2
-6	63	-16	2
$-5\frac{1}{2}$	$55\frac{1}{4}$	-15	2
-5	48	-14	2
$-4\frac{1}{2}$	$41\frac{1}{4}$	-13	2
-4	35	-12	2
$-3\frac{1}{2}$	$29\frac{1}{4}$	-11	2
-3	24	-10	2
$-2\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{4}$	-9	2
-2	15	-8	2
$-1\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	-7	2
-1	8	-6	2
$-\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	-5	2
0	3	-4	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	3	-4	2
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	-3	2
1	0	-2	2
$1\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-1	2
2	NaN	0	NaN
$2\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	1	2
3	0	2	2
$3\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{4}$	3	2
4	3	4	2
$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{4}$	5	2
5	8	6	2
$5\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{4}$	7	2
6	15	8	2
$6\frac{1}{2}$	$19\frac{1}{4}$	9	2
7	24	10	2

Aufgabe (22)

•Funktion/Faktorisieren

$f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x - 1}$

Zaehler faktorisieren:

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

Nullstelle für Polynmomdivision erraten:1

$$
\begin{array}{llll}
(x^3 & -2x^2 & -5x & +6 \quad) : (x-1) = x^2 - x - 6 \\
-(x^3 & -x^2) & & \\
\hline
 & -x^2 & -5x & +6 \\
 & -(-x^2 & +x) & \\
\hline
 & & -6x & +6 \\
 & & -(-6x & +6) \\
\hline
 & & & 0
\end{array}
$$

$1x^2 - x - 6 = 0$

$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$

$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{25}}{2}$

$x_{1/2} = \dfrac{1 \pm 5}{2}$

$x_1 = \dfrac{1+5}{2} \qquad x_2 = \dfrac{1-5}{2}$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$

$\underline{x_1 = -2; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_2 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

$\underline{x_3 = 3; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Nenner faktorisieren:

$x - 1 = 0$

$x - 1 = 0 \qquad / + 1$

$x = 1$

$\underline{x_4 = 1; \quad \text{1-fache Nullstelle}}$

Faktorisierter Term:

$f(x) = \dfrac{(x+2)(x-1)(x-3)}{(x-1)}$

• Definitionsbereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• Term gekürzen

$f(x) = \dfrac{(x+2)(x-3)}{1}$

• Funktion/Ableitungen/Stammfunktion

$f(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$

$f'(x) = 2x - 1$

$f''(x) = 2$

$F(x) = \displaystyle\int (x^2 - x - 6)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + c$

• Definitions- und Wertebereich: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \qquad \mathbb{W} =](-6\frac{1}{4}), \infty[$

• Grenzwerte:

$f(x) = x^2(1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{6}{x^2})$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = [1\cdot\infty^2] = \infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = [1\cdot(-\infty)^2] = \infty$

• Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
$f(-x) = 1\cdot(-x)^2 - 1\cdot(-x) - 6$
keine Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung

• Nullstellen / Schnittpunkt mit der x-Achse:
$f(x) = x^2 - x - 6 = 0$

$1x^2 - x - 6 = 0$
$x_{1/2} = \dfrac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2\cdot 1}$
$x_{1/2} = \dfrac{+1\pm\sqrt{25}}{2}$
$x_{1/2} = \dfrac{1\pm 5}{2}$
$x_1 = \dfrac{1+5}{2} \qquad x_2 = \dfrac{1-5}{2}$
$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$
$\underline{x_1 = -2;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$\underline{x_2 = 3;\quad \text{1-fache Nullstelle}}$

• Vorzeichentabelle:

	$x<$	-2	$< x <$	3	$< x$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\underline{x \in]-\infty;-2[\quad\cup\quad]3;\infty[\quad f(x) > 0 \quad \text{oberhalb der x-Achse}}$

$\underline{x \in]-2;3[\quad f(x) < 0 \quad \text{unterhalb der x-Achse}}$

• Extremwerte/Hochpunkte/Tiefpunkte:
$f'(x) = 2x - 1 = 0$

$2x - 1 = 0 \qquad / + 1$
$2x = 1 \qquad / : 2$
$x = \dfrac{1}{2}$
$x = \dfrac{1}{2}$
$\underline{x_3 = \dfrac{1}{2};\quad \text{1-fache Nullstelle}}$
$f''(\frac{1}{2}) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Tiefpunkt:}(\frac{1}{2}/-6\frac{1}{4})}$

• Monotonie/ streng monoton steigend (sms)/streng monoton fallend (smf)

	$x<$	$\frac{1}{2}$	$< x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

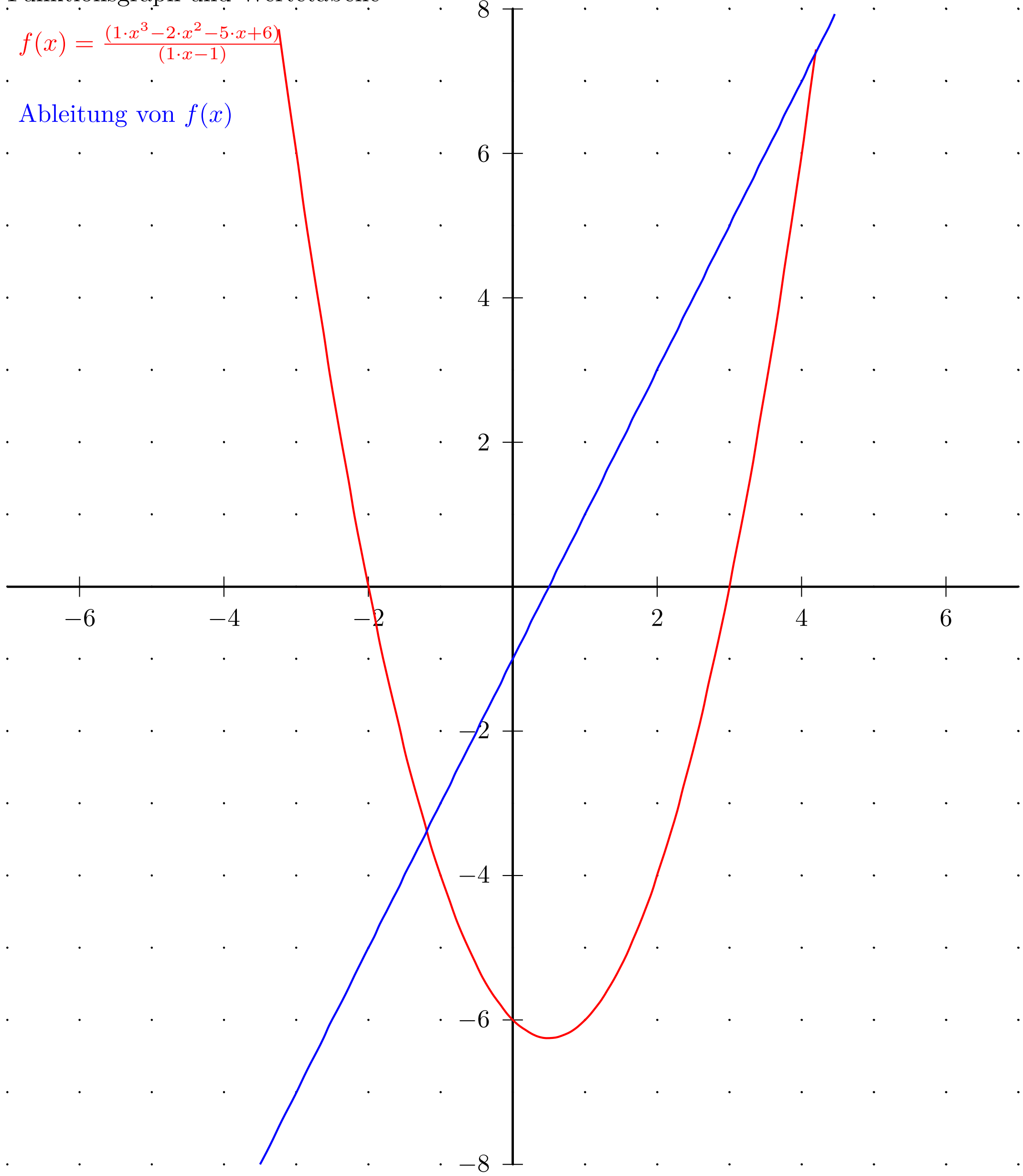
$\underline{x \in]\frac{1}{2};\infty[\quad f'(x) > 0 \quad \text{streng monoton steigend}}$

$\underline{x \in]-\infty;\frac{1}{2}[\quad f'(x) < 0 \quad \text{streng monoton fallend}}$

• Eingeschlossene Fläche mit der x-Achse
$$A = \int_{-2}^{3} \left(x^2 - x - 6\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x\right]_{-2}^{3}$$

$$= \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 6 \cdot 3\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2)\right)$$
$$= \left(-13\frac{1}{2}\right) - \left(7\frac{1}{3}\right) = -20\frac{5}{6}$$

Funktionsgraph und Wertetabelle



x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
-7	50	-15	2
$-6\frac{1}{2}$	$42\frac{3}{4}$	-14	2
-6	36	-13	2
$-5\frac{1}{2}$	$29\frac{3}{4}$	-12	2
-5	24	-11	2
$-4\frac{1}{2}$	$18\frac{3}{4}$	-10	2
-4	14	-9	2
$-3\frac{1}{2}$	$9\frac{3}{4}$	-8	2
-3	6	-7	2
$-2\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	-6	2
-2	0	-5	2
$-1\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{4}$	-4	2
-1	-4	-3	2
$-\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{4}$	-2	2
0	-6	-1	2

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
0	-6	-1	2
$\frac{1}{2}$	$-6\frac{1}{4}$	0	2
1	NaN	1	NaN
$1\frac{1}{2}$	$-5\frac{1}{4}$	2	2
2	-4	3	2
$2\frac{1}{2}$	$-2\frac{1}{4}$	4	2
3	0	5	2
$3\frac{1}{2}$	$2\frac{3}{4}$	6	2
4	6	7	2
$4\frac{1}{2}$	$9\frac{3}{4}$	8	2
5	14	9	2
$5\frac{1}{2}$	$18\frac{3}{4}$	10	2
6	24	11	2
$6\frac{1}{2}$	$29\frac{3}{4}$	12	2
7	36	13	2